ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Pierre-Vincent KOSELEFF

Sujet : *Calcul formel pour les méthodes de Lie en mécanique hamiltonienne*

Soutenue le 29 janvier 1993 devant la commission d'examen :

P. CARTIER, Président

A. GIORGILLI,
J. MICHEL,
D. PINCHON, Rapporteurs

M. DEMAZURE,
M. GIUSTI,
D. KROB,
J. LASKAR, Examinateurs

Remerciements

À l'origine, il y a le hasard des rencontres. J'ai eu la chance de croiser, au tout début des années 80, des professeurs de mathématiques remarquables.

Ensuite, il y a le désir de progresser. Avec les conditions matérielles et spirituelles qui m'ont été offertes, il y a la nécessité de bien faire.

Le guide de ce travail, Michel Demazure, a toujours su m'orienter de la façon la plus directe. Je lui en saurai toujours gré.

Au delà de ses lumières en mécanique céleste, Jacques Laskar a su me soutenir en de maintes occasions.

Marc Giusti, par l'accueil qu'il m'a réservé dans l'Équipe Aleph et Géode, pour son esprit d'ouverture et ses connaissances multiples, a beaucoup contribué à l'aboutissement de cette recherche.

Didier Pinchon, avec qui j'ai commencé ce travail, au Centre Scientifique IBM France, a toujours été, malgré les intempéries, un précieux conseiller. Je le remercie aussi d'avoir accepté la tâche de rapporter.

Je mesure l'honneur que me fait Pierre Cartier de participer à ce jury.

J'exprime ma profonde gratitude à Jean Michel et Antonio Giorgilli, d'avoir accepté de rapporter sur mon travail, aussi promptement et avec autant de précision. Ils ont largement contribué, par leurs remarques, à faire progresser ce texte.

Je remercie Daniel Krob, d'avoir accepté, aussi rapidement, de participer à ce jury.

Il y a les souvenirs de moments passés en équipe. J'ai une pensée pour mes camarades qui étaient déjà présents en 1986, Marc Chardin et Guillermo Moreno, toujours disponibles, et plus particulièrement, pour François Maltey, pour le travail et l'amitié que nous avons partagés. Je dois beaucoup à François Ollivier, pour ses conseils et ses aides de toute nature, même lorsque j'étais éloigné.

Joël Marchand, par son aide dans les tentatives de domptage des machines, m'est devenu rapidement indispensable. Nicole Dubois a, en peu de temps, trouvé les mots qui font qu'on peut compter sur elle.

Für meinen Großvater, Alexander Koseleff

... Et je voyais ce qu'on pressent
Quand on pressent l'entrevoyure
Entre les persiennes du sang
Et que les globules figurent
Une mathématique bleue
Dans cette mer jamais étale
D'où nous remonte peu à peu
Cette mémoire des étoiles ...

Léo Ferré, la mémoire et la mer

Sommaire

Introduction

Parmi les méthodes de perturbation utilisées en mécanique, les méthodes de Lie jouent un rôle très important dans des domaines aussi variés que la mécanique céleste, l'optique géométrique, la physique des plasmas, la théorie des accélérateurs de particules, le transport de neutrons ou l'électricité. Leur essor remonte à la parution de deux articles, un article du mécanicien céleste André Deprit [11] en 1969 et celui de deux physiciens Alex Dragt et John Finn [14] en 1976.

Les méthodes de Lie fournissent, lorsque c'est possible, des changements de variables explicites (contrairement à la méthode de von-Zeipel, par exemple) dans lesquelles les équations du système sont plus "simples". Ces méthodes fournissent des intégrales premières formelles sous forme de séries de Lie. En général, les séries ne convergent pas, mais le calcul de leurs premiers termes peut fournir des informations sur la stabilité du système au voisinage de points d'équilibre.

Les méthodes de Lie sont principalement fondées sur l'utilisation de transformations de Lie pour effectuer des changements de variables symplectiques, qui conservent la nature du système. Lorsque j'ai commencé de m'intéresser aux méthodes de Lie en mécanique hamiltonienne, et plus particulièrement en mécanique céleste, il s'est avéré qu'il y avait principalement deux écoles, utilisant deux transformations *a priori* distinctes. Les mécaniciens célestes ont l'habitude de considérer les transformations canoniques comme des transformations de Lie, c'est-à-dire comme l'application, au temps 1, du flot d'un Hamiltonien non-autonome. Pour d'autres, on représente les transformations canoniques comme des composées d'applications, au temps 1, de flots hamiltoniens autonomes. L'utilisation d'une transformation ou d'une autre induisent des méthodes de perturbations très proches dans leur formalisme. Il m'a paru donc intéressant de les comparer.

Leur comparaison a consisté, d'une part, à montrer que ces deux transformations étaient deux façons de représenter le même objet. D'autre part, on a étudié les coûts d'utilisation de ces deux méthodes. Enfin, comme ces méthodes produisent des séries dont l'étude qualitative peut fournir des informations sur la stabilité du système, il m'a semblé indispensable de proposer des estimations de convergence pour la méthode de Dragt-Finn, à l'instar de ce qui avait été fait pour la transformation de Deprit.

Le fait que les deux transformations soient équivalentes est un fait connu, mais je me suis attaché à exprimer les relations existant entre elles, et à donner des méthodes pour les calculer effectivement. Ces méthodes reposent essentiellement sur la possibilité d'exprimer des identités exponentielles, dans une algèbre de Lie libre.

Plusieurs articles ont proposé également la comparaison des deux méthodes induites, soit expérimentalement sur des exemples, soit en comptant le nombre de termes dans le développement en série. Ici, on donnera plutôt des algorithmes pour calculer les transformations et on comparera le nombre d'évaluations nécessaires à chaque ordre.

Des estimations pour la transformation de Deprit ont été proposées et ont fourni des résultats de stabilité. On proposera ici, en suivant le même modèle, des estimations pour la méthode de Dragt-Finn. Ces résultats ne sont pas meilleurs que pour la transformation de Deprit mais à peu près du même ordre.

Étant donné un système hamiltonien sous une forme convenable, on s'intéresse principalement ici à deux types de problèmes. Le premier, de type quantitatif, est de pouvoir fournir lorsque cela est possible des approximations des trajectoires pour une certaine catégorie de conditions initiales. Le second, plus qualitatif, (mais on recherchera néanmoins des bornes effectives) est de pouvoir estimer la stabilité du système au voisinage de points d'équilibre.

Pour ces deux problèmes, les méthodes de Lie apportent des résultats, parce que les formes obtenues fournissent, ou des solutions approchées, ou des intégrales premières approchées, lesquelles nous renseignent sur la stabilité du système.

La manipulation formelle de transformations de Lie sera la première étape. Pour ce faire, on se placera dans une algèbre de Lie libre dans laquelle nous donnerons les méthodes de calcul des relations entre les transformations, ce qui nous permettra d'identifier les deux méthodes de perturbations. Les méthodes de calcul des relations seront rendues possibles par l'utilisation de la base de Lyndon plutôt que celle de Hall. Ce sera l'occasion de discuter de propriétés spécifiques à la base de Lyndon qui permettent de calculer de telles identités, dont en particulier la formule Baker-Campbell-Hausdorff.

De façon résiduelle, les algorithmes élaborés dans la première partie permettront de calculer effectivement des transformations de Lie formelles. La recherche de certaines propriétés algébriques des coefficients de celles-ci nous fourniront des intégrateurs symplectiques. Les intégrateurs symplectiques sont des méthodes numériques pour calculer sur de très longues périodes les solutions approchées de systèmes hamiltoniens. Ceux-ci ont la propriété de conserver des surfaces d'énergie proches de celle du système à étudier.

⋆⋆⋆

Dans cette thèse, on pourra distinguer cinq parties principales.

La première partie se situe dans les algèbres de Lie libres. C'est ici que les méthodes pour calculer les relations de type exponentielle seront exposées. C'est ici qu'on montrera comment on peut passer de l'exponentielle à la transformation de Lie et de cette dernière à la transformation de Dragt-Finn. Ces relations seront exprimées dans une des bases mises à notre disposition. On y verra la base de Hall et la base de Lyndon, et on montrera que, aussi bien dans l'une que dans l'autre, on peut manipuler des polynômes. À l'origine, je m'étais plutôt intéressé à la base de Hall, avec laquelle des algorithmes de décomposition ont été implantés. Par chance, elle permettait de calculer les relations entre les générateurs de la transformation de Dragt-Finn et la transformation de Deprit. Ce n'est que récemment que j'ai eu connaissance d'une généralisation possible à la base de Lyndon. La base de Lyndon permettait de calculer des relations du type exponentielle en se plaçant dans l'algèbre associative.

On proposera cependant une alternative, en énonçant une propriété de factorisation de la base de Lyndon, qui permet, tout en restant dans l'algèbre de Lie libre, de généraliser le calcul des relations entre les générateurs des transformations du groupe des automorphismes des séries formelles de l'algèbre de Lie libre. Cette propriété affirme essentiellement que l'opérateur adjoint $[a,]$ définit un isomorphisme de module que l'on peut représenter par l'identité dans la base de Lyndon.

La seconde partie se situe dans les systèmes hamiltoniens. Après avoir succinctement exposé les concepts de base du formalisme hamiltonien, on mettra en évidence l'utilisation de la transformation de Dragt-Finn et de la transformation de Deprit. On exposera les différentes méthodes de perturbations induites par celles-ci. On montrera l'équivalence formelle de la transformation de Deprit et de la transformation de Dragt-Finn et on comparera leur coût respectif. On y exposera également différentes méthodes recueillies ici ou là pour résoudre la fameuse équation de perturbation, clé de voûte de la construction de la forme normale.

Dans la troisième partie, on donnera des estimations sur le rayon de convergence des séries intervenant dans les méthodes de perturbations. En particulier, à l'instar des travaux publiés sur la transformation de Deprit dont les résultats seront énoncés, on y verra en parallèle des estimations liées à l'utilisation de la transformation de Dragt-Finn. Malheureusement, comme elle ne sont pas meilleures que celles obtenues pour la transformation de Deprit, on se bornera à rappeler les déductions qu'on peut en tirer quant à une estimation de la diffusion ou de la stabilité de systèmes hamiltoniens au voisinage d'un point elliptique. C'est un fait remarquable, ces déductions ne dépendent pas, en fait, de la transformation utilisée mais simplement de propriétés liées à l'existence d'intégrales premières formelles et on les rappellera.

Dans la quatrième partie, on s'intéressera, comme application des résultats obtenus dans la première partie, à l'obtention d'intégrateurs symplectiques, qui sont des méthodes numériques d'intégration pour les systèmes hamiltoniens. Ces intégrateurs sont apparus depuis peu et on montrera comment on peut les construire en utilisant les résultats de la première partie. On retrouvera ceux déjà connus et on en donnera une liste exhaustive pour les petits ordres. On montrera que les différentes méthodes employées pour les calculer sont algébriquement équivalentes. On apportera quelques améliorations dans le cas où l'énergie cinétique est un polynôme du second degré et on donnera quelques intégrateurs pour le problème du mouvement de Kepler perturbé, un desquels sera prochainement testé par le Bureau des Longitudes.

Enfin, dans la dernière mais non moins volumineuse partie, on décrira les diverses implantations réalisées en Axiom ou en Scratchpad II (langage prototype) des algorithmes des parties précédentes. Après un bref aperçu des concepts de base du système de Calcul Formel Axiom, on y décrira complètement l'implantation des algèbres de Lie libre. On comparera, en particulier, une représentation des monômes de Lie par des listes ou par des arbres (ce qui paraît plus naturel) et on constatera que dans la première représentation, une dérécursification des algorithmes est possible et, en particulier, que l'ordre de Hall, c'est-à-dire un ordre total sur le magma, est un ordre lexicographique.

On expliquera comment ont été écrits les paquetages permettant de calculer les relations entre les générateurs des transformations de Lie, ce qui nous permettra de générer les équations à résoudre pour la recherche d'intégrateurs symplectiques. Ceux-ci sont obtenus en trouvant les solutions réelles d'un système d'équations polynomiales. On utilisera pour cela les routines existantes en Axiom et en Macaulay, c'est-à-dire, le calcul d'une base de Gröbner.

On décrira également diverses implantations de méthodes de perturbations évoquées dans les parties précédentes. Pour ce faire on aura créé divers domaines dont celui des séries de Poisson, commodes pour travailler avec les variables action-angle et pour certains cas non-autonomes.

En appendice, on donnera quelques exemples de calculs effectués sur une machine IBM-RS/6000-550, en utilisant les implantations réalisées. Nous donnerons également les temps de calculs et le nombre de termes dans les relations entre les générateurs des différentes transformations.

Chapitre I

Algèbres de Lie libres

Notre but, dans ce chapitre est de fournir des méthodes pour calculer explicitement des identités exponentielles, telles que, par exemple, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Ces identités sont d'abord prouvées en se plaçant dans l'algèbre des séries de Lie sur un alphabet pondéré. On étudie en particulier le sous-groupe du groupe des automorphismes de Lie proches de l'identité engendré par les exponentielles.

On décrit les outils et les résultats nécessaires à l'implantation d'un manipulateur de polynômes et de séries formelles de Lie dans une algèbre de Lie libre.

Nous utilisons, en particulier, deux des bases de l'algèbre de Lie libre : la base de Hall et la base de Lyndon. On donne, pour l'une comme pour l'autre, un algorithme de construction, et on rappelle une méthode de décomposition des polynômes de Lie sur celles-ci.

Une méthode classique (cf. [42, 57]) pour calculer la formule de Campbell-Hausdorff et d'autres identités exponentielles consiste à utiliser la bijection entre la base de Lyndon et les mots de Lyndon, bijection qui se prolonge en un isomorphisme de modules dont la matrice triangulaire est facilement inversible. Cette technique nécessite de se placer dans l'algèbre associative.

Nous proposons d'utiliser ici une propriété de la base de Lyndon (cf. lemme 18, page 23) qui permet de factoriser un polynôme de Lie par une dérivation intérieure d'un monôme de la base.

On en déduit des méthodes générales afin d'exprimer la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, ainsi que l'exponentielle d'une série de Lie sous la forme d'un produit infini croissant de polynômes de Lie homogènes ou comme transformation de Lie, et ceci, tout en restant dans l'algèbre de Lie libre.

Ces méthodes générales seront ensuite utilisées pour représenter les transformations canoniques en mécanique hamiltonienne.

1. Définitions

Dans toute la suite, R désigne un anneau commutatif et X un alphabet, c'est-à-dire, un ensemble totalement ordonné, dont les éléments sont appelés des lettres.

1.1. Monoïde libre, magma libre

On note X^* le monoïde libre sur X, la structure libre engendrée par X, relativement à la concaténation qui est une loi de composition associative et qui possède un élément neutre. Les éléments de X^* sont appelés les mots. La loi de composition sur X^* admet un élément neutre, qui est le mot vide. Soit $w = uv$ un mot de X^*. On dit que u et v sont facteurs de w, et facteurs propres, s'ils sont distincts de w. On dit que u est facteur gauche, et v, facteur droit de w.

X^* est un ensemble ordonné par l'ordre lexicographique dont une définition est :

— si u est un facteur gauche propre de $v \in X^*$, alors $u < v$,

— pour tout u, v dans X^*, $u < v$ s'il existe $r, a, b, t, s \in X^*$ avec $u = ras, v = rbt$ et $a < b$.

Cet ordre total vérifie d'autre part :

— pour tout $w, u, v \in X^*$, on a $u < v$ si et seulement si $wu < wv$,

— si v n'est pas un facteur gauche de u, alors pour tout $w, z \in X^*$, on a $uw < vz$ si $u < v$.

Pour tout u, v de X^*, on dit que les mots $w_1 = uv$ et $w_2 = vu$ sont conjugués, et proprement conjugués si u et v ne sont pas le mot vide. La conjugaison est une relation d'équivalence. On note $|u|$ la longueur de u, c'est-à-dire le nombre de lettres formant le mot, et on note X_n l'ensemble des mots de X^* de longueur n.

$M(X)$ est le magma libre engendré par X. C'est l'ensemble des mots parenthésés munis de la loi de composition :

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \to & M \\ (u, v) & \mapsto & (u, v). \end{array}$$

On définit de façon récurrente le magma $M(X)$ en considérant la famille :

— $M_1(X) = X$,

— $M_n(X) = \bigsqcup_{p+q=n} M_p(X) \times M_q(X)$ pour $n \geq 2$ où $\bigsqcup$ désigne la réunion disjointe ou la fusion,

et en définissant $M(X) = \bigsqcup_{n \geq 1} M_n(X)$. On définit, de même, la longueur sur $M(X)$, comme étant l'unique $n \geq 0$, tel que $u \in M_n(X)$.

On note δ l'application canonique de $M(X)$ sur X^* donnée par le déparenthésage. Par exemple, si $x, y \in X$

$$\delta\left(x, (((x, y), (x, (x, y))), y)\right) = xxyxxyy = x^2yx^2y^2.$$

1.2. Algèbre associative, algèbre de Lie libre

$\mathcal{A}(X, R)$ désigne l'algèbre associative libre, sur l'anneau R, engendrée par X. C'est l'algèbre des polynômes non commutatifs, dans les variables X. C'est naturellement un R-module libre de base X^*, totalement gradué par le degré (la longueur). Sauf cas particuliers, on note $\mathcal{A}(X)$ pour $\mathcal{A}(X, R)$.

L'algèbre libre $A(X, R)$ est la R-algèbre du magma libre $M(X)$. La multiplication sur $A(X, R)$ est une extension de la loi de composition de $M(X)$.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{L}$ est une algèbre, dont la loi multiplicative, appelée crochet de Lie, est bilinéaire, alternée et vérifie l'identité de Jacobi. Pour tout $a, b, c \in \mathfrak{L}$, on a

— $[a, a] = 0$

— $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$.

L'algèbre sur R munie du crochet de Lie $[u, v] = uv - uv$, où $u, v, uv \in \mathcal{A}(X, R)$, est une algèbre de Lie.

$L(X, R)$ désigne l'algèbre de Lie libre sur R, engendrée par X. Elle est définie comme le quotient de $A(X, R)$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme (u, u) et $(u, (v, w)) + (v, (w, u)) + (w, (u, v))$. Considérant l'application canonique de $M(X) \to L(X, R)$, morphisme de magma pour le crochet de Lie, l'image d'un élément de $M(X)$ est appelé alternant ou monôme de Lie. Les monômes de Lie de longueur n engendrent le sous-module libre $L_n(X, R)$ de $L(X, R)$ des éléments de longueur n. On note, sauf cas particuliers, $L(X)$ et $L_n(X)$ en lieu et place de $L(X, R)$ et $L_n(X, R)$. $L(X, R)$ apparaît, alors, gradué par le degré, mais ce n'est pas la seule graduation possible.

Si X est de cardinal fini q, on a (cf. [6, 43, 44]) la formule de Witt :

$$\sum_{d|n} d \dim(L_d(X)) = q^n. \tag{1.1}$$

On appelle polynômes de Lie, les éléments de $L(X)$.

On définit une injection canonique de R-module $\phi : L(X, R) \to \mathcal{A}(X, R)$, par extension de l'inclusion de $X \subset \mathcal{A}(X, R)$:

— si $u \in X$ alors $\phi(u) = u$

— si $u = [v, w]$ alors $\phi(u) = \phi(v)\phi(w) - \phi(w)\phi(v)$.

2. Familles basiques de l'algèbre de Lie libre

Intéressons-nous aux bases de $L(X)$, constituées par un ensemble de monômes de Lie.

2.1. Base de Hall

On appelle ensemble de Hall, une famille $\mathcal{H}$ de $M(X)$ munie d'un ordre total $<$ vérifiant :

— si $u, v \in \mathcal{H}$ et $|u| < |v|$ alors $u < v$,

— $X \subset \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} \cap M_2(X) = \{(x, y); x < y \in X\}$,

— $h = (u, v) \in \mathcal{H}$ et $|h| \geq 3$ si et seulement si $u, v \in \mathcal{H}$, $u < v$ et $v = (v_1, v_2)$ avec $v_1 \leq u$.

Par abus de notation, nous noterons aussi $\mathcal{H}$, l'image de $\mathcal{H}$ dans $L(X)$. Posons, pour tout n, $\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \cap M_n(X)$.

Théorème 1 ([6]). — *$\mathcal{H}_n$ est une base de $L_n(X)$.*

Nous prouverons que $\mathcal{H}_n$ est une famille génératrice en donnant un algorithme de multiplication de deux polynômes de Lie. Pour ce qui est de l'indépendance, on se reportera à [6], où une démonstration directe est donnée.

2.2. Base de Lyndon

Considérons, dans le monoïde X^*, les classes de conjugaison, et prenons, comme représentant de chaque classe, son plus petit élément suivant l'ordre lexicographique. On a défini ainsi l'ensemble $\mathbf{L}$ des mots de Lyndon. On a les propriétés suivantes :

— tout mot de X^* se décompose de façon unique en un produit décroissant de mots de Lyndon (lemme de Širšov, [57]).

— $w \in \mathbf{L}$ si il existe $l < m \in \mathbf{L}$ tels que $w = lm$.

Cependant, un mot de Lyndon peut se décomposer en mots de Lyndon, de plusieurs façons. On a, par exemple, $aabb = a(abb) = (aab)b$. La paire (l, m), où m est de longueur maximale, est la factorisation standard de lm que l'on note $\sigma(lm)$. Pour l'exemple précédent, on a donc $\sigma(aabb) = (a, abb)$.

On peut alors définir une application Λ réciproque de $\delta : \mathbf{L} \to M(X)$ de la façon suivante : $\Lambda(a) = a$ si $a \in X$, sinon $\Lambda(n) = (\Lambda(l), \Lambda(m))$ si $\sigma(n) = (l, m)$.

On note $\mathcal{L} = \Lambda(\mathbf{L})$. Par abus de notation, on note la base de Lyndon par $\mathcal{L}$, ainsi que son image dans $L(X)$. On pose aussi $\mathcal{L}_n = \mathcal{L} \cap M_n(X)$.

THÉORÈME 2 ([44]). — *$\mathcal{L}_n(X)$ est une base de $L_n(X)$.*

Remarque. — Il semble que Širšov soit à l'origine de cette famille, couramment appelée la base de Lyndon.

Une autre propriété fait que la base de Lyndon peut être définie de façon analogue à la base de Hall : c'est un ensemble $\mathcal{L}$ de $M(X)$, muni d'un ordre total (l'ordre lexicographique sur les mots de Lyndon correspondants) et vérifiant :

— $X \subset \mathcal{L}$ et $\mathcal{L} \cap M_2(X) = \{(x, y) \,;\, x < y\}$,

— $h = (u, v) \in \mathcal{L}$ et $|h| \geq 3$ si et seulement si $u, v \in \mathcal{L}$, $u < v$ et $|u| = 1$ ou $u = (u_1, u_2)$ avec $v \leq u_2$.

2.3. Construction de la base de Hall

La construction de la base de Hall de façon récurrente est facile puisque, si $u \in \mathcal{H}_p(X)$ et $v \in \mathcal{H}_q(X)$, alors $[u, v] \in \mathcal{H}_{p+q}(X)$ dès lors que $u < v$ et que, si $v = [v_1, v_2]$ on a $v_1 \leq u$. Réciproquement, si $w \in \mathcal{H}_n(X)$, alors il existe p, q avec $p+q = n$, $u \in \mathcal{H}_p(X)$ et $v \in \mathcal{H}_q(X)$ tels que $w = [u, v]$.

On considère la construction suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(X) &= X, \\
\mathcal{H}_2(X) &= \{[x, y]; x < y \in \mathcal{H}_1(X)\}, \\
\mathcal{H}_n(X) &= \bigcup_{p=1}^{n-1} \{[x, y]; x \in \mathcal{H}_p(X), y = [y_1, y_2] \in \mathcal{H}_{n-p}(X), y_1 \leq x < [y_1, y_2]\} \\
&= \bigcup_{p+q=n, p \leq q} \{[x, y]; x \in \mathcal{H}_p(X), y = [y_1, y_2] \in \mathcal{H}_q(X), y_1 \leq x\}.
\end{aligned}$$

On remarque que les réunions ci-dessus sont disjointes, ce qui facilite la construction en n'obligeant pas à éliminer les doublons. L'algorithme sous-jacent retourne alors la liste triée des éléments de la base de Hall.

2.4. Construction de la base de Lyndon

La construction de la base de Lyndon est analogue à celle de la base de Hall, à une petite difficulté près, puisque si $u, v \in \mathbf{L}$ et $u < v$ pour l'ordre lexicographique, alors $uv \in \mathbf{L}$, mais $[\Lambda(u), \Lambda(v)]$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{L}$, si (u, v) n'est pas la factorisation standard de uv. Cet inconvénient est certainement lié au fait que l'ordre lexicographique n'est pas un ordre total sur $M(X)$. Néanmoins, en construisant successivement $\bigcup_{x \in \mathcal{L}_p(X)} \left\{ \bigcup_{y \in \mathcal{L}_q(X); x<y} \{[x, y]\} \right\}$ pour x et y croissants, on construit directement le crochet de Lyndon correspondant à la factorisation standard. On applique alors l'algorithme suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(X) &= X \\
\mathcal{L}_2(X) &= \{[x, y]\ ; x < y \in \mathcal{L}_1(X)\} \\
\mathcal{L}_n(X) &= \bigsqcup_{x \in \mathcal{L}_1(X)} \{[x, y]; y \in \mathcal{L}_{n-1}(X), x < y\} \\
& \bigsqcup \bigsqcup_{p=2}^{n-1} \left\{ \bigsqcup_{x \in \mathcal{L}_p(X)} \{[x, y]; y \in \mathcal{L}_{n-p}(X), [x_1, x_2] = x < y \leq x_2\} \right\}
\end{aligned}
$$

où $A \bigsqcup B$ désigne la fusion des deux listes triées A et B pour l'ordre lexicographique sur les mots déparenthésés.

2.5. Exemples

Pour $X = \{x, y\}$ on a, comme éléments de la base jusqu'à l'ordre 6 :
Base de Hall :
$\{x, y, [x, y], [x, [x, y]], [y, [x, y]], [x, [x, [x, y]]], [y, [x, [x, y]]], [y, [y, [x, y]]], [x, [x, [x, [x, y]]]],$
$[y, [x, [x, [x, y]]]], [y, [y, [x, [x, y]]]], [y, [y, [y, [x, y]]]], [[x, y], [x, [x, y]]], [[x, y], [y, [x, y]]],$
$[x, [x, [x, [x, [x, y]]]]], [y, [x, [x, [x, [x, y]]]]], [y, [y, [x, [x, [x, y]]]]], [y, [y, [y, [x, [x, y]]]]],$
$[y, [y, [y, [y, [x, y]]]]], [[x, y], [x, [x, [x, y]]]], [[x, y], [y, [x, [x, y]]]], [[x, y], [y, [y, [x, y]]]],$
$[[x, [x, y]], [y, [x, y]]]\}$

Base de Lyndon :
$\{x, y, [x, y], [x, [x, y]], [[x, y], y], [x, [x, [x, y]]], [x, [[x, y], y]], [[[x, y], y], y], [x, [x, [x, [x, y]]]],$
$[x, [x, [[x, y], y]]], [[x, [x, y]], [x, y]], [x, [[[x, y], y], y]], [[x, y], [[x, y], y]], [[[[x, y], y], y], y],$
$[x, [x, [x, [x, [x, y]]]]], [x, [x, [x, [[x, y], y]]]], [x, [[x, [x, y]], [x, y]]], [x, [x, [[[x, y], y], y]]],$
$[x, [[x, y], [[x, y], y]]], [[x, [[x, y], y]], [x, y]], [x, [[[[x, y], y], y], y]], [[x, y], [[[x, y], y], y]],$
$[[[[[x, y], y], y], y], y]\}$

3. Décomposition sur les bases

Intéressons-nous maintenant au processus de décomposition des polynômes de Lie sur une des deux bases précédemment définies. La question est de savoir si on peut effectuer les opérations usuelles sur une algèbre, telles que l'addition ou la multiplication.

Considérant les polynômes de Lie comme des combinaisons linéaires de monômes de la base de Hall ou de la base de Lyndon, les opérations liées à la structure de groupe additif découlent naturellement.

L'étape principale de la multiplication de deux polynômes de Lie (ici la multiplication désigne le crochet de Lie) est la multiplication de deux monômes de la base. Pour la base de Hall comme pour la base de Lyndon, on peut effectuer cette opération de façon récursive sans même connaître aucun élément de la base.

On donne, ici, deux algorithmes de décomposition du produit de deux monômes de la base. Comme l'algèbre de Lie $L(X)$ est graduée par la longueur, on aura montré, par la même occasion, que la base de Hall et la base de Lyndon sont des familles génératrices de $L(X)$.

Une implantation de ces algorithmes est proposée dans la dernière partie.

3.1. Base de Hall

Pour u et v, deux éléments de la base de Hall, notons $\mathtt{mult}(u,v)$ la décomposition de $[u,v]$ sur la base de Hall.

La multiplication de deux polynômes de Lie : $p = \sum p_i.u_i$ et $q = \sum q_i.v_i$ est alors définie par $p * q = \sum p_i q_j.\mathtt{mult}(u_i, v_j)$. Considérant les propriétés du crochet de Lie et de la base de Hall, on peut définir `mult` comme suit :

si $u = v$ **alors** $\mathtt{mult}(u,v) := 0$
sinon si $v < u$ **alors** $\mathtt{mult}(u,v) := -\mathtt{mult}(v,u)$ **;**
si $|v| = 1$ **alors** $\mathtt{mult}(u,v) := 1.[u,v]$
sinon $v = [v_1, v_2]$ **; si** $v_1 \leq u$ **alors** $\mathtt{mult}(u,v) := 1.[u,v]$
sinon $\mathtt{mult}(u,v) := 1.v_1 * \mathtt{mult}(u,v_2) - 1.v_2 * \mathtt{mult}(u,v_1)$.

Pour montrer la convergence de cet algorithme, il suffit de montrer que tout monôme de la forme $[a,[b,c]]$, avec $a < b < c < [b,c] \in \mathcal{H}$, se décompose par $\mathtt{mult}(a,[b,c])$.

Supposons l'existence de monômes ne se décomposant pas. Parmi ceux-ci, considérons ceux de longueur minimale (qui sont en nombre fini si l'alphabet est fini) et parmi ces derniers, celui où a est maximal pour l'ordre sur la base de Hall.

Puisque $a < b$, on doit calculer $1.b * \mathtt{mult}(a,c) - 1.c * \mathtt{mult}(a,b)$. Mais, par hypothèse sur le triplet (a,b,c), $\mathtt{mult}(a,c)$ et $\mathtt{mult}(a,b)$ se décomposent respectivement en $\sum \beta_i [a_i, c_i]$ et $\sum \gamma_i [a_i, b_i]$. On est donc conduit à calculer des termes $\mathtt{mult}(b,[a_i,c_i])$ et $\mathtt{mult}(c,[a_i,b_i])$.

Comme $b < c$, on a $|b| \leq |c| < |[a,c]| = |[a_i,c_i]|$, donc $b < [a_i,c_i]$ et $\mathtt{mult}(b,[a_i,c_i])$ se décompose soit parce que $a_i \leq b$, soit parce que $a < b$ et a a été supposé maximal.

Si $c < [a_i,b_i]$, alors soit $a_i \leq c$ et $\mathtt{mult}(c,[a_i,b_i]) = [c,[a_i,b_i]] \in \mathcal{H}$, soit $a < c < a_i$ et, par hypothèse sur a, $\mathtt{mult}(c,[a_i,b_i])$ se décompose. Si $[a_i,b_i] < c$, alors $|a| < |[a_i,b_i]|$ et $\mathtt{mult}(c,[a_i,b_i]) = -\mathtt{mult}([a_i,b_i],c)$ se décompose, par hypothèse sur a, puisque $a < [a_i,b_i]$.

Dans tous les cas, l'existence de a maximal est contredite. Cette preuve d'arrêt de l'algorithme de multiplication de deux monômes de la base de Hall prouve, en outre, que la base de Hall est effectivement une famille génératrice de $L(X)$ puisque $L_1(X)$ est engendrée par $X \subset M(X)$.

Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de tester l'appartenance d'un monôme de Lie à la base de Hall, mais qu'il suffit de comparer deux monômes de Lie. La comparaison de deux monômes est donc l'étape principale de l'algorithme et, par conséquent, l'optimisation de celle-ci est essentielle.

3.2. Base de Lyndon

Les mêmes considérations valent pour la base de Lyndon et il suffit de savoir multiplier deux monômes de la base de Lyndon. De la même façon (cf. [45]), on définit `mult` comme suit :

si $u = v$ **alors** $\mathtt{mult}(u, v) := 0$
sinon si $v < u$ **alors** $\mathtt{mult}(u, v) := -\mathtt{mult}(v, u)$;
si $|u| = 1$ **alors** $\mathtt{mult}(u, v) := 1.[u, v]$
sinon $u = [u_1, u_2]$; **si** $v \leq u_2$ **alors** $\mathtt{mult}(u, v) := 1.[u, v]$
sinon $\mathtt{mult}(u, v) := 1.u_1 * \mathtt{mult}(u_2, v) + \mathtt{mult}(u_1, v) * 1.u_2$.

Pour montrer la convergence de cet algorithme, on pose le

LEMME 3 (Perrin [44]). — *Pour tout $a < b \in \mathcal{L}$, $\mathtt{mult}(a, b)$ est une combinaison linéaire finie de monômes de Lyndon $[a_i, b_i]$ vérifiant*

$$\delta([a_i, b_i]) \geq \delta([a, b]) \quad ou \quad \delta([a_i, b_i]) = \delta([a, b]) \quad et \quad a_i < a. \tag{3.1}$$

Le cas des crochets de longueur 1 ou 2 étant immédiat, ainsi que celui de $[a, b] < c \leq b \in \mathcal{L}$ il suffit de montrer que tout monôme de la forme $[[a, b], c]$, avec $a < [a, b] < b < c \in \mathcal{L}$, se décompose, par $\mathtt{mult}([a, b], c)$, sous la forme précédente.

Supposons l'existence de monômes ne se décomposant pas sous la forme (3.1). Parmi ceux-ci, considérons ceux de longueur minimale (qui sont en nombre fini si l'alphabet est fini) et, parmi ceux-ci, celui où $\delta(a)\delta(b)\delta(c)$ est maximal pour l'ordre sur la base de Lyndon, et $\delta(ab)$ est minimal.

On est amené à calculer $1.a * \mathtt{mult}(b, c) + \mathtt{mult}(a, c) * 1.b$. Mais par hypothèse sur les longueurs, $\mathtt{mult}(b, c) = \sum \alpha_i[b_i, c_i]$ avec $\delta([b_i, c_i]) \geq \delta(b)\delta(c)$ et $\mathtt{mult}(a, c) = \sum \beta_i[a_i, c_i]$ avec $\delta([a_i, c_i]) \geq \delta(a)\delta(c)$. On est conduit à calculer des termes de la forme $\mathtt{mult}([a_i, c_i], b)$ et $\mathtt{mult}(a, [b_i, c_i])$.

$\delta(a)\delta([b_i, c_i]) \geq \delta(a)\delta(b)\delta(c)$ mais cette fois $a < [a, b]$ et par hypothèse sur a, b, c on en déduit que $\mathtt{mult}(a, [b_i, c_i])$ se décompose sous la forme voulue, c'est-à-dire, en une somme de monômes $[u_j, v_j]$, vérifiant $\delta(u_j)\delta(v_j) \geq \delta(a)\delta(b_i)\delta(c_i) \geq \delta(a)\delta(b)\delta(c) = \delta([[a, b], c])$.

Comme $b < c$, on a $\delta(b)\delta(c) < \delta(c)\delta(b)$, donc, de $\delta([a_i, c_i]) \geq \delta(a)\delta(c)$, on déduit $\delta([a_i, c_i])\delta(b) \geq \delta(a)\delta(c)\delta(b) \geq \delta(a)\delta(b)\delta(c)$, lequel est maximal par hypothèse. On conclut que $\mathtt{mult}([a_i, c_i], b)$ se décompose en monômes de Lyndon $[u_j, v_j]$ vérifiant $\delta([u_j, v_j]) \geq \delta([a_i, c_i])\delta(b) \geq \delta(a)\delta(c)\delta(b) \geq \delta(a)\delta(b)\delta(c) = \delta([a, b])\delta(c)$.

On en déduit donc que, pour tout couple de monômes de Lyndon (a, b), $\mathtt{mult}(a, b)$ est une combinaison linéaire de monômes de Lyndon qui vérifient en outre d'être plus grands, pour l'ordre lexicographique, que $\delta(a)\delta(b)$. Ceci prouve, en passant, que la base de Lyndon est une famille génératrice de l'algèbre de Lie libre $L(X)$. Pour montrer que $\mathcal{L}$ est une famille libre de $L(X)$, on montre le

LEMME 4 (Viennot [56]). — *Pour tout $u \in \mathcal{L}$, $\phi(u) = 1.\delta(u) + v$ où v est une combinaison linéaire de mots supérieurs strictement à u.*

Ce lemme affirme qu'il y a donc une bijection entre les mots de Lyndon et les crochets de Lyndon et qu'il y a isomorphisme de modules entre $L(X, R)$ et la projection de $\mathcal{A}(X, R)$ sur le sous-module engendré par les mots de Lyndon qui en constituent une base.

3.3. Exemples

Prenons comme alphabet $X = \{a, b, c\}$.

- $m = [[a,\ b],\ c]$ se décompose sur la base de Lyndon en $[a,\ [b,\ c]] + [[a,\ c],\ b]$ et sur la base de Hall en $-[c,\ [a,\ b]]$
- $m = [[[[[c,\ b],\ a],\ a],\ a],\ a],\ a]$ se décompose sur la base de Hall en :

$$\begin{aligned}&[b,\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ c]]]]]] - [c,\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ b]]]]]] + 5\ [[a,\ b],\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ c]]]]]\\ &\qquad - 5\ [[a,\ c],\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ b]]]]] + 10\ [[a,\ [a,\ b]],\ [a,\ [a,\ [a,\ c]]]]\\ &\qquad + 10\ [[a,\ [a,\ c]],\ [a,\ [a,\ [a,\ b]]]]\end{aligned}$$

  et sur la base de Lyndon en : $-[a,\ [a,\ [a,\ [a,\ [a,\ [b,\ c]]]]]]$

- $m = [[[[[[a,\ b],\ c],\ c],\ c],\ c],\ c]$ se décompose sur la base de Lyndon en :

$$\begin{aligned}&[a,\ [[[[b,\ c],\ c],\ c],\ c],\ c]] + 5\ [[a,\ c],\ [[[[b,\ c],\ c],\ c],\ c]] + 10\ [[[a,\ c],\ c],\ [[[b,\ c],\ c],\ c]]\\ &\qquad + 10\ [[[[a,\ c],\ c],\ c],\ [[b,\ c],\ c]] + 5\ [[[[[a,\ c],\ c],\ c],\ c],\ [b,\ c]]\\ &\qquad + [[[[[[a,\ c],\ c],\ c],\ c],\ c],\ b]\end{aligned}$$

  et sur la base de Hall en : $-[c,\ [c,\ [c,\ [c,\ [c,\ [a,\ b]]]]]]$.

4. POLYNÔMES DE LIE ET POLYNÔMES NON COMMUTATIFS

Nous venons de voir que la manipulation de polynômes de Lie, considérés comme des combinaisons linéaires de monômes de la base de Hall ou de la base de Lyndon, est possible si on sait effectuer le crochet de Lie de deux monômes de base. Une implantation de ces manipulations est proposée dans la dernière partie.

Autre problème, celui de décider si un polynôme en variables non commutatives est ou n'est pas la forme développée d'un polynôme de Lie. Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème et sont liées à la façon de considérer les polynômes en variables non commutatives.

On peut considérer un polynôme en variables non commutatives comme un élément de l'algèbre associative $\mathcal{A}(X, R)$, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire, à coefficients dans R, de mots.

On peut considérer l'algèbre associative $\mathcal{A}(X, R)$ comme l'algèbre enveloppante de $L(X, R)$ (cf. [6, 42, 50, 57]), et le théorème de Poincaré-Birkoff-Witt fournit une base de cette algèbre à partir d'une base de $L(X)$. Plus précisément, on a le théorème :

THÉORÈME 5 (Poincaré-Birkhoff-Witt). — *Si $L(X)$ admet comme base $\{P_1 < P_2 < \cdots < P_n \cdots\}$ alors son algèbre enveloppante admet comme base les éléments de la forme $P_{i_1} P_{i_2} \cdots P_{i_n}$ avec $P_{i_1} \geq P_{i_2} \geq \cdots \geq P_{i_n}$.*

Ce théorème et des algorithmes de multiplications d'éléments de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt ont permis (cf. Petitot [45]) d'implanter les polynômes en variables non-commutatives en tant qu'éléments de l'algèbre enveloppante.

Ces algorithmes permettent, par exemple, de tester l'appartenance d'un polynôme non commutatif à l'algèbre de Lie libre, de calculer la formule de Baker-Campbell-Hausdorff et d'autres identités exponentielles ([42, 45, 56]).

Une autre façon de procéder, si on sait déjà que le polynôme est un polynôme de Lie est de considérer la propriété induite par le lemme 4 qui permet d'affirmer que

Théorème 6 (Michel [43]). — *Il y a un isomorphisme de modules entre $L(X)$ et le sous-module de $\mathcal{A}(X)$ engendré par les mots de Lyndon. La matrice de celui-ci dans la base de Lyndon est triangulaire avec des 1 sur la diagonale.*

On utilise alors l'algorithme suivant, pour écrire un polynôme p en somme de monômes de Lyndon.

Soit $p = \sum \alpha_i u_i$ **;** $r := 0$
tant que $p \neq 0$ **faire**
  $r := r + \alpha_1 \Lambda(u_1)$
  $p := p - \alpha_1 \tilde{\phi}(u_1)$
renvoyer r

La fonction Λ est la fonction de parenthésage sur les mots de Lyndon. Si on connaît par avance la base de Lyndon, il n'est pas nécessaire de calculer $\Lambda(u_1)$ car l'ordre lexicographique est un ordre total sur les crochets de Lyndon. Sinon, on peut appliquer un algorithme de factorisation standard (cf. [44, 57]) qui factorise tout mot de façon unique en produit de mots de Lyndon décroissants.

La fonction $\tilde{\phi}$ est la composée de la projection π de $\mathcal{A}(X,R)$ sur le sous-module engendré par les mots de Lyndon et de la fonction ϕ de décomposition d'un crochet de Lie en polynôme de $\mathcal{A}(X,R)$. Ces techniques ont été employées, par exemple, dans [43] pour calculer les coefficients de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. J'ai également proposé une implantation en Le-Lisp, décrite dans [32].

5. Séries formelles de Lie

On suppose, dans cette partie, que $\mathbb{Q} \subset R$. Notons $\hat{L}(X,R) = \prod_{n\geq 0} L_n(X,R)$, l'anneau des séries formelles de Lie. On note $\hat{L}(X)$ pour $\hat{L}(X,R)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Un élément de $\hat{L}(X)$ s'écrit de façon unique comme somme d'éléments de $L_n(X)$, et cet anneau muni du crochet de Lie

$$\left[\sum_{n\geq 0} u_n, \sum_{n\geq 0} v_n\right] = \sum_{n\geq 0}\sum_{p+q=n} [u_p, v_q],$$

est une algèbre de Lie graduée, séparée et complète. De la même façon, on définit l'anneau des séries formelles non commutatives $\hat{\mathcal{A}}(X,R) = \prod_{n\geq 0} \mathcal{A}_n(X,R)$. On note alors $\mathfrak{M}$, l'idéal de $\hat{\mathcal{A}}(X)$ engendré par X et on définit les applications exponentielle et logarithme par :

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathfrak{M} & \longrightarrow & 1+\mathfrak{M} \\ & x & \mapsto & \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}, \\ \log : & 1+\mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathfrak{M} \\ & x & \mapsto & -\sum_{n\geq 1} \dfrac{(1-x)^n}{n}. \end{array} \tag{5.1}$$

5.1. Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

On démontre que exp et log sont des applications réciproques (cf. [6, 42]). On a, en outre, le théorème de Campbell-Hausdorff :

THÉORÈME 7 (Campbell-Hausdorff). — *Soit $X = \{x, y\}$, on a*

$$\log[\exp(x)\exp(y)] \in \hat{L}(X, \mathbb{Q}).$$

Ce résultat s'étend (cf. [6, Ch. II, §6]) à toute algèbre de Lie libre graduée, séparée et complète et on a le théorème plus général :

THÉORÈME 8. — *Si $x, y \in \hat{L}(X, \mathbb{Q})$ alors*

$$\log[\exp(x)\exp(y)] \in \hat{L}(X, \mathbb{Q}).$$

5.2. Algèbres de Lie pondérées

Étant donné un alphabet X, fini où non, on attribue à chaque lettre x de X, un poids $|x|_*$. On gradue ensuite $\mathcal{A}(X)$ et $L(X)$ par le degré pondéré où le multi-degré quasi-homogène $||_*$ que l'on définit de façon habituelle comme la somme des poids des lettres composant le mot ou le crochet de Lie. C'est naturellement l'unique morphisme de X^* (resp. $M(X)$) $\rightarrow \mathbb{N}$ qui prolonge le poids sur X. On peut alors graduer $L(X)$ et $\mathcal{A}(X)$ par le multi-degré quasi-homogène et on note $\tilde{L}_n(X)$ et $\tilde{\mathcal{A}}_n(X)$ les sous-modules de $L(X)$ et de $\mathcal{A}(X)$ engendrés par les éléments de poids n.

Remarque. — Si toutes les lettres de l'alphabet sont de poids 1, on a bien sûr $\hat{L}_n(X) = \tilde{L}_n(X)$ et $\hat{\mathcal{A}}_n(X) = \tilde{\mathcal{A}}_n(X)$. Si aucune des lettres de l'alphabet n'est de poids nul, on a

$$\prod_{n\geq 1} L_n(X) \simeq \prod_{n\geq 1} \tilde{L}_n(X).$$

5.2.1. Exemples

Si $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et $|x_i|_* = i$, $\tilde{L}_5(X)$ admet comme base de Lyndon

$$\{[x_1, [x_1, [x_1, x_2]]], [x_1, [x_1, x_3]], [[x_1, x_2], x_2], [x_1, x_4], [x_2, x_3], x_5\}. \tag{5.2}$$

Si $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ où $|x_i|_* = i$, alors on a $\dim \tilde{L}_1(X) = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\dim \tilde{L}_n(X) = l_n$ où l_n est la dimension de $L_n(\{a, b\})$. En utilisant la formule de Witt, on déduit alors que

$$\sum_{d|n} d \dim \tilde{L}_n(X) = 2^n - 1. \tag{5.3}$$

Preuve. — Posons $Y = \{a, b\}$, et montrons que l'application croissante

$$\begin{array}{rccc} \eta: & X & \to & Y^* \\ & x_k & \mapsto & ab^{k-1} \end{array} \tag{5.4}$$

se prolonge en un isomorphisme de module $\tilde{L}_n(X) \to L_n(Y)$ pour $n \geq 2$. Plus précisément, on montre par récurrence sur n, que tout mot de Lyndon de longueur n de Y^* s'écrit de façon unique, comme mot de Lyndon de X^* de poids n, et réciproquement.

Si $n = 1$, alors a s'écrit comme u_1.

Considérons (u, v), la factorisation standard de $w \in Y^*$, mot de Lyndon de longueur n, différent de b. Si $v = b$, alors $w = ab^{n-1}$ s'écrit u_n, sinon u et v s'écrivent comme mots de Lyndon de X^*. η étant croissante, uv s'écrit alors comme mot de Lyndon.

Réciproquement, l'image par η de tout produit croissant de deux mots de Lyndon de X^* est un produit croissant de deux mots de Lyndon et est un mot de Lyndon de Y^*.

On en déduit alors que $\dim \tilde{L}_n(X) = \dim L_n(Y)$, pour tout $n \geq 2$, et le résultat annoncé. On constate la bijection au rang 5 pour $\mathcal{L}_5(Y)$

$$\{[a, [a, [a, [a, b]]]], [a, [a, [[a, b], b]]], [[a, [a, b]], [a, b]], [a, [[[a, b], b], b]],$$
$$[[a, b], [[a, b], b]], [[[[a, b], b], b], b]\}$$

⋆⋆⋆

Définissons

$$\tilde{L}(X, R) = \prod_{n \geq 0} \tilde{L}_n(X, R) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{A}}(X, R) = \prod_{n \geq 0} \tilde{\mathcal{A}}_n(X, R) \tag{5.5}$$

comme les séries formelles de Lie ou de mots. Un élément de $\tilde{L}(X)$ s'écrit de façon unique comme somme de d'éléments de poids croissants. Pour $x \in \tilde{L}(X)$, on note $(x)_n$ ou x_n, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, le terme de poids n de x. Si $x, y \in \tilde{L}(X, R)$, on a

$$([x, y])_n = \sum_{p+q=n} [x_p, y_q]. \tag{5.6}$$

De cette façon $\tilde{L}(X, R)$ est une algèbre de Lie graduée, séparée et complète.

Définissons $\tilde{\mathcal{A}}(X, R)^+$ le module engendré par les mots de poids ≥ 1. De la même façon, on définit $\tilde{L}(X, R)^+$ que l'on peut inclure dans $\tilde{\mathcal{A}}(X, R)^+$. On peut alors définir l'exponentielle et le logarithme par :

$$\begin{array}{rccc} \exp: & \tilde{\mathcal{A}}(X, R)^+ & \to & 1 + \tilde{\mathcal{A}}(X, R)^+ \\ & x & \mapsto & \sum_{n \geq 0} \dfrac{x^n}{n!}. \\ \log: & 1 + \tilde{\mathcal{A}}(X, R)^+ & \to & \tilde{\mathcal{A}}(X, R)^+ \\ & x & \mapsto & -\sum_{n \geq 1} \dfrac{(1-x)^n}{n!}. \end{array}$$

Le logarithme et l'exponentielle sont des applications réciproques et on a un équivalent du théorème de Campbell-Hausdorff :

Lemme 9. — *Soient $x, y \in \tilde{L}(X, R)^+$, alors on a*

— $\exp(x)\exp(y) = \exp(z)$, *où* $z \in \tilde{L}(X, R)^+$,

— *$z = z_p + z_q + \sum_{n \geq p+q} z_n$ et $z_p + z_q = x_p + y_q$,*

— *Pour tout $m \geq p+q$, $z_m \in \tilde{L}_m(x_p, \ldots, x_m, y_q, \ldots, y_m)$.*

Remarque. — $\tilde{L}_m(x_p, \ldots, x_m, y_q, \ldots, y_m)$ est le sous-module des éléments de poids m de la sous algèbre engendrée par $(x_p, \ldots, x_m, y_q, \ldots, y_m)$, ou le sous module des éléments de poids m de l'algèbre de Lie libre sur l'alphabet $\{x_p, \ldots, x_m, y_q, \ldots, y_m\}$, ce qui revient au même.

Le fait que $\exp(x)\exp(y) = \exp(z)$, où $z \in \tilde{L}(X, R)$, est une conséquence du théorème de Campbell-Hausdorff (théorème 7) et tient au fait que $\prod_{n\geq 1} L_n(X) \simeq \prod_{n \geq 1} \tilde{L}_n(X)$. On sait également que dans $\hat{L}(X, R)$

$$z = x + y + \sum_{n \geq 2} z_n \quad \text{où} \quad z_n \in L_n(X),$$

et pour tout $u \in L_n(x, y)$, on a $|u|_* \geq p + q$.

⋆⋆⋆

Muni de ce lemme, on peut alors énoncer la propriété suivante.

Proposition 10 (Factorisation en produit d'exponentielles, [53]).
Pour tout $k \in \tilde{L}(X, R)^+$, il existe une unique série $g \in \tilde{L}(X, R)^+$ telle que

$$\exp(k) = \cdots \exp(g_n) \cdots \exp(g_1). \tag{5.7}$$

Démonstration. — On construit terme à terme la série g et on montre que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $k^{(n)} \in \prod_{p>n} \tilde{L}_p(X)$, tel que

$$\exp(k)\exp(-g_1) \cdots \exp(-g_n) = \exp(k^{(n)}). \tag{5.8}$$

- Si $n = 1$, on a en vertu du lemme 9, pour $g_1 = k_1$,

$$\exp(k^{(1)}) = \exp(k)\exp(-g_1)$$

  avec $k_1^{(1)} = k_1 - g_1 = 0$, donc $k^{(1)} \in \prod_{n>1} \tilde{L}_n(X)$.

- Supposons la propriété (5.8) démontrée au rang p, on a alors

$$\exp(k)\exp(-g_1) \cdots \exp(-g_p) = \exp(k^{(p)}).$$

  Prenons $g_{p+1} = k_{p+1}^{(p)}$. On a toujours en vertu de lemme 9,

$$\exp(k^{(p)})\exp(-g_{p+1}) = \exp(k^{(p+1)}),$$

  où $k_{p+1}^{(p+1)} = k_{p+1}^{(p)} - g_{p+1} = 0$, ce qui assure la propriété (5.8) au rang $p + 1$.

On en déduit le résultat en passant à la limite.

6. Transformations de Lie

On s'intéresse, ici, aux automorphismes de Lie, c'est-à-dire aux automorphismes d'algèbre de Lie de $\tilde{L}(X,R)$. Plus précisément, on s'intéresse aux applications proches de l'identité, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, on a :

$$Tx - x \in \prod_{n > |x|_*} \tilde{L}_n(X,R). \tag{6.1}$$

Pour $x \in M(X)$, notons $t_i x = (Tx)_{|x|_*+i}$. On déduit alors de $[Tx, Ty] = T[x,y]$, que $t_0[x,y] = [x,y]$ et que $x \mapsto t_1 x$ est une dérivation :

$$[t_1 x, y] + [x, t_1 y] = t_1[x,y]. \tag{6.2}$$

L'ensemble des dérivations de $\tilde{L}(X,R)$ est une algèbre de Lie. On a la proposition (cf. [49]) :

Théorème 11. — *Si D est une dérivation de $\tilde{L}(X)$, alors*

— $\exp(tD)$ *est un automorphisme de Lie, pour tout $t \in R$,*

— *l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de Lie s'identifie à l'ensemble des dérivations.*

6.1. Algèbre de Lie des adjoints

Soit $L(x) = L_x$, la dérivation intérieure $y \mapsto [x,y]$, aussi appelée opérateur de Lie. On a, dans $\tilde{L}(X)$,

$$L(\textstyle\sum_{n\geq 0} f_n) = \sum_{n \geq 0} L(f_n). \tag{6.3}$$

L'ensemble des dérivations intérieures est une algèbre de Lie, appelée algèbre de Lie des adjoints, pour le crochet de Lie $[L_f, L_g] = L_f L_g - L_g L_f$ et on a la propriété suivante, découlant de l'identité de Jacobi :

$$[L_f, L_g] = L_{[f,g]}. \tag{6.4}$$

On définit, alors, le groupe des transformations de Lie ou transformations canoniques comme le groupe des automorphismes de $\tilde{L}(X)$ proches de l'identité, au sens défini précédemment. Le groupe des transformations canoniques opère sur l'algèbre de Lie des adjoints par automorphismes. On a

$$T L_f T^{-1} g = T[f, T^{-1} g] = [Tf, g] \tag{6.5}$$

donc

$$T L_f T^{-1} = L_{Tf}. \tag{6.6}$$

Des éléments parmi d'autres du groupe des automorphismes de Lie proches de l'identité sont

- l'exponentielle d'une dérivation intérieure L_f définie par

$$\exp(L_f)g = \sum_{i\geq 0} \frac{L_f^i}{i!} g. \tag{6.7}$$

Si $f \in \tilde{L}(X)^+$, $g \in \tilde{L}(X)$, $G = \exp(L_f)g$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} G_0 & = & g_0, \\ G_n & = & \sum_{p=0}^n G_{p,n-p}, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} G_{0,n} & = & g_n, \\ G_{p,q} & = & \sum_{p_1+\cdots+p_k=p} \dfrac{L_{f_{p_1}} \cdots L_{f_{p_k}}}{k!} g_q. \end{array} \right. \tag{6.8}$$

Remarque. — $\sum_{p_1+\cdots+p_k=p}$ désigne ici $\sum_{k,p_1,\ldots,p_k;p_1+\cdots+p_k=p}$.

- Étant donnée $f \in \tilde{L}(X)^+$, on définit l'application T_f de la façon suivante : si $g \in \tilde{L}(X)$, $F = T_f g$ est définie par

$$F_n = \sum_{p=0}^n (T_f)_p g_{n-p} \quad \text{où} \quad (T_f)_0 = I, \quad (T_f)_n = -\sum_{p=1}^n \tfrac{p}{n} (T_f)_{n-p} L_{f_p}. \tag{6.9}$$

Son inverse (on le montrera par la suite) T_f^{-1}, se définit de façon analogue. Pour $G = T_f^{-1} g$, on a

$$G_n = \sum_{p=0}^n (T_f^{-1})_p g_{n-p} \quad \text{où} \quad (T_f^{-1})_0 = I, \quad (T_f^{-1})_n = \sum_{p=1}^n \tfrac{p}{n} L_{f_p} (T_f^{-1})_{n-p}. \tag{6.10}$$

Les relations précédentes permettent également d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} G_0 & = & g_0, \\ G_n & = & \sum_{p=0}^n G_{p,n-p}, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} G_{0,n} & = & g_n, \\ G_{p,q} & = & \sum_{k=1}^p \tfrac{k}{p} [f_k, G_{p-k,q}]. \end{array} \right. \tag{6.11}$$

On utilise la transformation T_f^{-1} plutôt que la transformation T_f car elle est plus simple à définir par récurrence.

⁂

Avant de vérifier que ces opérateurs sont des automorphismes de Lie, nous allons donner une caractérisation des transformations de type T_f, ce qui nous permettra de vérifier que que T_f et T_f^{-1} sont bien inverses l'une de l'autre.

Considérons une indéterminée ε et

$$f(\varepsilon) = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n f_n \in \tilde{L}(X,R)[\![\varepsilon]\!].$$

Posons $T_{f(\varepsilon)} = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n (T_f)_n$. $T_{f(\varepsilon)}$ vérifie, en identifiant les membres terme à terme, l'équation différentielle

$$\frac{\partial T_{f(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = -T_{f(\varepsilon)} L_{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}}. \tag{6.12}$$

Réciproquement, $T_{f(\varepsilon)}$ est la solution de (6.12) valant l'identité en $\varepsilon = 0$. On en déduit alors la caractérisation suivante

Proposition 12. — *Les transformations T_f sont les solutions pour $\varepsilon = 1$ de l'équation différentielle*

$$\frac{\partial T_{f(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = -T_\varepsilon L_{\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}},\ T_{f(0)} = I. \tag{6.13}$$

De la même manière, on caractérise les transformations T_f^{-1} par l'équation différentielle

$$\frac{\partial T^{-1}_{f(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = L_{\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} T^{-1}_{f(\varepsilon)}. \tag{6.14}$$

On déduit alors que

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} T_{f(\varepsilon)} T^{-1}_{f(\varepsilon)} = -T_{f(\varepsilon)} L_{\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} T^{-1}_{f(\varepsilon)} + T_{f(\varepsilon)} L_{\frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} T^{-1}_{f(\varepsilon)} = 0, \tag{6.15}$$

c'est-à-dire que $T_f T_f^{-1} = T_{f(\varepsilon)} T^{-1}_{f(\varepsilon)} = I$.

$\star\star\star$

Vérifions à présent que ces transformations sont des transformations de Lie. On utilise le lemme ([53])

Lemme 13. — *Pour tout $k \geq 0$: $L_f^k[g,h] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left[L_f^i g, L_f^{k-i} h\right]$.*

On démontre cette propriété par récurrence, en utilisant l'identité de Jacobi :

$$[f,[u,v]] = -[u,[v,f]] - [v,[f,u]] = [u,[f,v]] + [[f,u],v]. \tag{6.16}$$

Au rang $k+1$, on écrit

$$\begin{aligned}
L_f^{k+1}[g,h] &= L_f L_f^k[g,h] \\
&= L_f \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left\{ \left[L_f^i g, L_f^{k-i} h\right] + \left[L_f^i g, L_f^{k-i} h\right] \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left\{ \left[L_f^{i+1} g, L_f^{k-i} h\right] + \left[L_f^i g, L_f^{k+1-i} h\right] \right\} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \left[L_f^i g, L_f^{k+1-i} h\right]. \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

$\star\star\star$

On en déduit donc, pour l'exponentielle

$$\begin{aligned}
\exp(L_f)[g,h] &= \sum_{n\geq 0} \frac{L_f^n}{n!}[g,h] && (6.18)\\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left[L_f^p g, L_f^{n-p} h\right] && (6.19)\\
&= \sum_{p+q\geq 0} \frac{1}{p+q!} \frac{p+q!}{p!q!} \left[L_f^p g, L_f^q h\right] && (6.20)\\
&= [\sum_{p\geq 0} \tfrac{1}{p!} L_f^p g, \sum_{q\geq 0} \tfrac{1}{q!} L_f^q h] && (6.21)\\
&= [\exp(L_f)g, \exp(L_f)h]. && (6.22)
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Pour la transformation T_f^{-1}, en posant $G = T_f^{-1}g$, $H = T_f^{-1}h$ et $F = T_f^{-1}[g,h]$, on montre (cf. [24]) que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$F_k = \sum_{i=0}^{k} [G_i, H_{k-i}] = [G,H]_k. \tag{6.23}$$

La démonstration se fait par récurrence en considérant

$$\begin{aligned}
F_n &= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n}[f_k, F_{n-k}] && (6.24)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n}\Big[f_k, [G,H]_{n-k}\Big] && (6.25)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} \tfrac{k}{n}[f_k,[G_i,H_{n-k-i}]] && (6.26)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k} \tfrac{k}{n}\left\{[G_i,[f_k,H_{n-k-i}]] + [[f_k,G_i],H_{n-k-i}]\right\} && (6.27)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-i} \tfrac{k}{n}\left\{[G_i,[f_k,H_{n-k-i}]] + [[f_k,G_{n-k-i}],H_i]\right\} && (6.28)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{n-i}{n}[G_i,H_{n-i}] + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{i}{n}[G_i,H_{n-i}] && (6.29)\\
&= \sum_{i=1}^{n} [G_i,H_{n-i}]. && (6.30)
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Ces deux transformations ont ceci de remarquable qu'elles sont entièrement déterminées par la donnée d'une série de Lie qu'on nomme la série génératrice associée. Dans le groupe des transformations canoniques, on a donc au moins trois types de transformations :

— Les exponentielles de dérivation intérieure $\exp(L_k)$, et leurs inverses qui sont également des exponentielles

— Les transformations de type T_f et leurs inverses de type T_f^{-1}

— Les transformations de type M_g ou M_g^{-1} encore appelées transformations de Dragt-Finn. À $g \in \tilde{L}(X)$ on associe le produit d'exponentielles

$$M_g^{-1} = \cdots \exp(L_{g_n}) \cdots \exp(L_{g_1}). \tag{6.31}$$

On peut définir ces trois transformations comme séries formelles d'opérateurs de Lie $\sum_{n\geq 0} T_n$, de telle façon qu'on ait, pour tout $f \in \tilde{L}(X)$

$$Tf = \sum_{n\geq 0}\sum_{p=0}^{n} T_p f_{n-p}. \tag{6.32}$$

— pour l'exponentielle $\exp(L_k)$,

$$T_0 = I, \quad T_n = \sum_{p_1+\cdots+p_m=n} \frac{L_{k_{p_1}} \cdots L_{k_{p_m}}}{m!}, \tag{6.33}$$

— pour la transformation T_f^{-1},

$$T_0 = I, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n} L_{w_k} T_{n-k}, \tag{6.34}$$

et, par conséquent, pour la transformation T_f,

$$T_0 = I, \quad T_n = -\sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n} T_{n-k} L_{w_k}. \tag{6.35}$$

La formule développée de T_n est donnée par

$$T_n = \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \tfrac{k_1}{k_1} \tfrac{k_2}{k_1+k_2} \cdots \tfrac{k_j}{k_1+\cdots+k_j} L_{w_{k_1}} \cdots L_{w_{k_j}}. \tag{6.36}$$

— pour le produit d'exponentielles (transformation de Dragt-Finn inverse),

$$T_0 = I, \quad T_n = \sum_{\wp(1,n;n)} \frac{L_{g_n}^{m_n} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_n! \cdots m_1!}, \tag{6.37}$$

et pour son inverse (c'est-à-dire la transformation de Dragt-Finn)

$$T_0 = I, \quad T_n = \sum_{\wp(1,n;n)} (-1)^{m_1+\cdots+m_p} \frac{L_{g_1}^{m_1} \cdots L_{g_n}^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!}. \tag{6.38}$$

Ici $\wp(p,q;n)$ représente les partitions de n, entre les sommants p et q,

$$\wp(p,q;n) = \{(m_p, \ldots, m_q); pm_p + \cdots + qm_q = n\}. \tag{6.39}$$

6.2. Relations entre les transformations

Montrons que ces trois transformations ne sont que trois façons différentes de représenter la même transformation. Plus précisément, nous démontrons par étapes

PROPOSITION 14. — *Soient $w, g, k \in \tilde{L}(X, \mathbb{Q})^+$, alors il existe*

— *$g' \in \tilde{L}(X)^+$, telle que $T_w = M_{g'}$, et pour tout $n \geq 1$, $g'_n - w_n \in L(w_1, \ldots, w_{n-1})$,*

— *$k' \in \tilde{L}(X)^+$, telle que $M_g = \exp(L_{k'})$, et pour tout $n \geq 1$, $k'_n - g_n \in L(g_1, \ldots, g_{n-1})$,*

— *$w' \in \tilde{L}(X)^+$, telle que $\exp(L_k) = T_{w'}$, et pour tout $n \geq 1$, $w'_n - k_n \in L(k_1, \ldots, k_{n-1})$.*

De la proposition 9 et de la relation $[L_f, L_g] = L_{[f,g]}$, on déduit qu'on peut exprimer l'exponentielle d'une dérivation intérieure comme produit d'exponentielles de dérivations intérieures, c'est-à-dire, étant donné $k \in \tilde{L}(X)^+$, il existe $g \in \tilde{L}(X)^+$ telle que

$$\exp(L_k) = \cdots \exp(L_{g_n}) \cdots \exp(L_{g_1}), \tag{6.40}$$

et pour tout $n \geq 1$, $g_n \in L(k_1, \cdots, k_n)$ et $g_n - k_n \in L(k_1, \cdots, k_{n-1})$, et réciproquement.

⁎⁎⁎

On montre ici comment on peut écrire un produit d'exponentielles (transformation de Dragt-Finn) comme transformation de type T_f et réciproquement. Ce résultat a été en partie démontré par Finn [19], mais il ne donne pas explicitement les relations entre les générateurs.

Proposition 15. — *Étant donnée une série génératrice* $g(\varepsilon) = \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n g_n$ *et la transformation de Dragt-Finn correspondante*

$$M_{g(\varepsilon)} = \exp(-\varepsilon L_{g_3})\cdots\exp(-\varepsilon^n L_{g_n})\cdots,$$

il existe une unique série $w(\varepsilon) = \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n w_n$ *telle que*

$$T_{w(\varepsilon)} = M_{g(\varepsilon)}.$$

On a, pour tout n,

$$w_n = \sum_{1\leq k\leq n}\frac{k}{n}\sum_{\wp(k+1,n-k;n-k)}\frac{L_{g_{n-k}}^{m_{n-k}}\cdots L_{g_{k+1}}^{m_{k+1}}}{m_{k+1}!\cdots m_{n-k}!}g_k.$$

Démonstration. — En différentiant $M_{g(\varepsilon)}$ par rapport à ε, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{g(\varepsilon)}}{\partial\varepsilon} &= \sum_{n\geq 1}\left[\exp(-\varepsilon L_{g_3})\cdots\exp(-\varepsilon^{n-1}L_{g_{n-1}})\right]\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\exp(-\varepsilon^n L_{g_n})\right]\right]\left[\exp(-\varepsilon^{n+1}L_{g_{n+1}})\cdots\right]\\
&= \sum_{n\geq 1}\left[\exp(-\varepsilon L_{g_3})\cdots\exp(-\varepsilon^{n-1}L_{g_{n-1}})\right]\left[-n\varepsilon^{n-1}L_{g_n}\right]\left[\exp(-\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\right]\\
&= M_{g(\varepsilon)}\sum_{n\geq 1}M_{g(\varepsilon)}^{-1}\left[\exp(-\varepsilon L_{g_3})\cdots\exp(-\varepsilon^{n-1}L_{g_{n-1}})\right]\left[-n\varepsilon^{n-1}L_{g_n}\right]\left[\exp(-\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\right]\\
&= M_{g(\varepsilon)}\sum_{n\geq 1}\left[\cdots\exp(\varepsilon^n L_{g_n})\right]\left[-n\varepsilon^{n-1}L_{g_n}\right]\left[\exp(-\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\right]\\
&= M_{g(\varepsilon)}L\left[\sum_{n\geq 1}-n\varepsilon^{n-1}\left[\cdots\exp(\varepsilon^n L_{g_n})\right]g_n\right]. \qquad (6.41)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\frac{\partial M_{g(\varepsilon)}}{\partial\varepsilon} = -M_{g(\varepsilon)}L(S),$$

où

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n\geq 1}n\varepsilon^{n-1}\left[\cdots\exp(\varepsilon^{n-1}L_{g_{n-1}})\right]g_n \qquad (6.42)\\
&= \sum_{n\geq 1}\varepsilon^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\wp(k+1,n-k;n-k)}\frac{L_{g_{n-k}}^{m_{n-k}}\cdots L_{g_{k+1}}^{m_{k+1}}}{m_{k+1}!\cdots m_{n-k}!}g_k\right], \qquad (6.43)
\end{aligned}$$

et $\wp$ est défini en (6.39). D'autre part, d'après (6.12) et les conditions initiales $T_0 = M_0 = I$, une condition nécessaire et suffisante pour avoir $T_{w(\varepsilon)} = M_{g(\varepsilon)}$ est que

$$S = \frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial\varepsilon},$$

c'est-à-dire, en considérant chaque terme de la série formelle,

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{1\leq k\leq n} \frac{k}{n} \sum_{\wp(k+1,n-k;n-k)} \frac{L_{g_{n-k}}^{m_{n-k}} \cdots L_{g_{k+1}}^{m_{k+1}}}{m_{k+1}! \cdots m_{n-k}!} g_k \\ &= g_n + \sum_{1\leq k\leq n-1} \frac{k}{n} \sum_{\wp(k+1,n-k;n-k)} \frac{L_{g_{n-k}}^{m_{n-k}} \cdots L_{g_{k+1}}^{m_{k+1}}}{m_{k+1}! \cdots m_{n-k}!} g_k. \end{aligned} \tag{6.44}$$

Ces relations explicites permettent de prouver que, pour tout n, $w_n \in L(g_1, \ldots, g_n)$, et $w_n - g_n \in L(g_1, \ldots, g_{n-1})$. La forme triangulaire des relations permet alors d'affirmer que, pour tout n, $g_n \in L(w_1, \ldots, w_n)$ et $g_n - w_n \in L(w_1, \ldots, w_{n-1})$.

En prenant $\varepsilon = 1$, on déduit le résultat cherché dans le cadre des séries de Lie.

⁂

La relation entre l'exponentielle et la transformation de type T_f^{-1} se déduit des deux relations précédentes.

6.3. Composition de transformations

En considérant la famille de transformations de Lie de type T_f et l'équation différentielle qui la caractérise (proposition 12), on montre que la composée de deux transformations de type T_f est naturellement une transformation de type T_f et on trouve les relations entre les générateurs.

Considérons les deux familles de transformations de Lie $T_{u(\varepsilon)}$ et $T_{v(\varepsilon)}$. De (6.12), on a

$$\frac{\partial T_{u(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = -T_{u(\varepsilon)} L_{\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_{v(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon} = -T_{v(\varepsilon)} L_{\frac{\partial v(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}}, \tag{6.45}$$

d'où on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} T_{u(\varepsilon)} T_{v(\varepsilon)} &= -T_{u(\varepsilon)} L_{\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} T_{v(\varepsilon)} - T_{u(\varepsilon)} T_{v(\varepsilon)} L_{\frac{\partial v(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} \\ &= -T_{u(\varepsilon)} T_{v(\varepsilon)} \left[T_{v(\varepsilon)}^{-1} L_{\frac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} T_{v(\varepsilon)} + L_{\frac{\partial v(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}} \right] \\ &= -T_{u(\varepsilon)} T_{v(\varepsilon)} L \left[T_{v(\varepsilon)}^{-1} \tfrac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \tfrac{\partial v(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right], \end{aligned} \tag{6.46}$$

ce qui prouve que $T_{u(\varepsilon)} T_{v(\varepsilon)}$ est la transformation de Lie associée à $w(\varepsilon)$ où

$$\tfrac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = T_{v(\varepsilon)}^{-1} \tfrac{\partial u(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \tfrac{\partial v(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \tag{6.47}$$

ce qui détermine w de façon unique puisque $w_0 = 0$. Plus précisément, (6.47) s'écrit terme à terme :

$$nw_n = \sum_{p=0}^{n-1} (T_v)_{n-p-1}^{-1} ((p+1) u_{p+1}) + n v_n \tag{6.48}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} (T_v)_{n-p}^{-1} p u_p + n v_n. \tag{6.49}$$

De cette propriété et des relations entre les différentes représentations des transformations canoniques, on montre que la composée de deux exponentielles est une exponentielle (ce que l'on savait déjà), que la composée de deux transformations de type T_f est une transformation de type T_f, que la composée de deux transformations de type M_g est une transformation de type M_g. On en déduit alors le résultat suivant :

PROPOSITION 16. — *L'ensemble des exponentielles d'opérateurs de Lie, l'ensemble des transformations T_f et l'ensemble des transformations M_g, sont le même sous-groupe du groupe des automorphismes de Lie proches de l'identité.*

Remarque. — On peut se passer des inverses de type T_f^{-1} ou M_g^{-1} en utilisant la proposition 14.

On note par la suite **G**, le sous-groupe des automorphismes de Lie proches de l'identité engendré par les exponentielles d'opérateurs de Lie. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 17. — *Si toute dérivation de $L(X)$ est une dérivation intérieure, alors* **G** *est le groupe des automorphismes de Lie proches de l'identité.*

Remarque. — La démonstration sera également effectuée dans le cadre d'une algèbre munie d'un crochet de Poisson où une propriété moins forte est vérifiée (cf. proposition 25, page 43).

Soit T un automorphisme de Lie, proche de l'identité. Nous allons montrer qu'il existe $g \in \tilde{L}(X)^+$, telle que $T = M_g$ et telle que, pour tout $p \geq 0$ et tout $x \in M(X)$, on ait, en posant $T^{(0)} = T$ et $T^{(p)} = \exp(-L_{g_p}) \cdots \exp(-L_{g_1})T$:

$$T^{(p)}x - x \in \prod_{n > p + |x|_*} \tilde{L}_n(X). \tag{6.50}$$

• Pour $p = 0$, (6.50) est vérifiée, par hypothèse sur T.
• Supposons construits $(g_1, \ldots, g_p) \in \tilde{L}_1(X) \times \cdots \times \tilde{L}_p(X)$, et vérifiant (6.50). $T^{(p)}$ est un automorphisme de Lie proche de l'identité, comme produit d'automorphismes de Lie proches de l'identité et, par conséquent, pour tout $x, y \in M(X) \subset \tilde{L}(X)$, on a

$$T^{(p)}[x, y] = [T^{(p)}x, T^{(p)}y]. \tag{6.51}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
(T^{(p)}[x, y])_{|[x,y]|_*} &= [(T^{(p)}x)_{|x|_*}, (T^{(p)}y)_{|y|_*}] = [x, y], & (6.52)\\
(T^{(p)}[x, y])_{|[x,y]|_* + k} &= 0, \quad 1 \leq k \leq p, & (6.53)\\
(T^{(p)}[x, y])_{|[x,y]|_* + p+1} &= [(T^{(p)}x)_{|x|_*+p+1}, y] + [x, (T^{(p)}y)_{|y|_*+p+1}]. & (6.54)
\end{aligned}$$

Définissons $t_p : L(X) \to L(X)$, en prolongeant par linéarité

$$x \in M(X) \mapsto (T^{(p)}x)_{|x|_*+p+1} \in \tilde{L}_{|x|_*+p+1}(X) \subset L(X). \tag{6.55}$$

On déduit alors, pour tout $x, y \in M(X)$, puis pour tout $x, y \in L(X)$, que t_p est une dérivation, donc une dérivation intérieure. Puisque $t_p x \in \tilde{L}_{|x|_*+p+1}$, pour $x \in M(X)$, on déduit alors qu'il existe $g_{p+1} \in \tilde{L}_{p+1}(X)$, tel que $t_p = -L_{g_{p+1}}$. En composant alors à gauche par $\exp(L_{g_{p+1}})$, on déduit, pour tout $x \in M(X)$, que

$$T^{(p+1)}x - x \in \prod_{n > |x|_* + p + 1} \tilde{L}_n(X). \tag{6.56}$$

À la limite, on déduit que $T = M_g^{-1}$, donc que $T \in \mathbf{G}$.

°°°

Dans cette partie, on a montré essentiellement le fait que l'ensemble des exponentielles d'opérateurs de Lie, l'ensemble des transformations T_f, l'ensemble des transformations M_g sont le même sous-groupe du groupe des automorphismes de Lie proches de l'identité.

On s'est appuyé sur le fait qu'il était possible d'exprimer une exponentielle comme une transformation T_f ou M_g et réciproquement et que l'ensemble des exponentielles d'opérateurs de Lie forme un groupe, ce qui est une conséquence du théorème de Campbell-Hausdorff.

Nous avons donné une formule explicite entre le générateur de la transformation de type M_g et le générateur de la transformation de type T_f, ce qui nous a permis de lier ces deux transformations (un résultat proche avait été démontré par Finn [19], mais il ne montrait pas l'appartenance des générateurs à $\tilde{L}(X)$).

7. Calcul des relations

On donne, ici, une méthode suffisamment générale permettant d'exprimer un élément de $\mathbf{G}$ sous la forme d'une des trois transformations précédemment étudiées. Ces techniques permettent alors de retrouver les formules de Baker-Campbell-Hausdorff en n'utilisant que des manipulations de polynômes de Lie, sans faire appel à l'algèbre associative.

⋆⋆⋆

À l'origine, j'avais pu trouver un moyen de calculer les relations entre les générateurs de la transformation T_f^{-1} et de la transformation M_g^{-1}, sans connaître la forme générale (6.44) et en utilisant la base de Hall, puisque j'ai eu connaissance des algorithmes pour la base de Lyndon ultérieurement.

L'idée était de trouver les relations entre w et g par identification directe de $(T_w^{-1})_n h_0$ et $(M_g^{-1})_n h_0$. Au vu de la forme des développements, on peut exprimer L_{w_n} par rapport aux L_{g_i} et réciproquement. Par contre, trouver les relations entre les w_i et les g_i demande de pouvoir reconnaître des crochets de Lie dans une expression développée, c'est-à-dire est équivalent au problème général de reconnaissance de polynômes de Lie dans l'algèbre enveloppante.

Par exemple, de $[L_f, L_g] = L_f L_g - L_g L_f = L_{[f,g]}$, les égalités $(M_g)_i^{-1} = (T_w)_i^{-1}$ induisent

$$L_{g_1} = L_{w_1}, L_{g_2} = L_{w_2}, L_{g_3} = L_{w_3} + \tfrac{1}{3} L_{w_1} L_{w_2} - \tfrac{1}{3} L_{w_2} L_{w_1},$$
$$L_{g_4} = L_{w_4} + \tfrac{1}{4} L_{w_1} L_{w_3} - \tfrac{1}{4} L_{w_3} L_{w_1} + \tfrac{1}{12} L_{w_1}^2 L_{w_2} + \tfrac{1}{12} L_{w_2} L_{w_1}^2 - \tfrac{1}{6} L_{w_1} L_{w_2} L_{w_1},$$

c'est-à-dire,

$$g_3 = w_3 + \tfrac{1}{3}[w_1, w_2] \quad \text{et} \quad g_4 = w_4 + \tfrac{1}{4}[w_1, w_3] + \tfrac{1}{12}[w_1, [w_1, w_2]], \tag{7.1}$$

et ainsi de suite, l'identification devenant de plus en plus difficile.

Dans le cas particulier du calcul du générateur de la transformation de Lie en fonction du produit d'exponentielles, on peut utiliser $\tilde{L}(X)$ où $X = \{h_0, g_1, \ldots, g_n\}$ et décomposer $(T_w^{-1})_n h_0 = (M_g^{-1})_n h_0$ sur la base de Hall.

Pour $i_{n-q} \neq 0$ et $i_{k+p} \neq 0$ dans (6.44), on obtient la décomposition suivante sur la base de Hall :

$$L_{g_{n-q}}^{i_{n-q}} \cdots L_{g_{k+p}}^{i_{k+p}} g_k = \overbrace{[g_{n-q}, [\cdots,}^{i_{n-q}} [\cdots, \overbrace{[g_{k+p}, [\cdots,}^{i_{k+p}} g_k] \cdots] \tag{7.2}$$

$$= -\overbrace{[g_{n-q}, [\cdots,}^{i_{n-q}} [\cdots, \overbrace{[g_{k+p}, [\cdots,}^{i_{k+p}-1} [g_k, g_{k+p}] \cdots]. \tag{7.3}$$

donc le terme général, dans (6.44), se décompose sur la base de Hall en

$$L\left[L_{g_{n-q}}^{i_{n-q}} \cdots L_{g_{k+p}}^{i_{k+p}} g_k\right] h_0 = \left[L_{g_{n-q}}^{i_{n-q}} \cdots L_{g_{k+p}}^{i_{k+p}} g_k, h_0\right] \tag{7.4}$$

$$= [h_0, \overbrace{[g_{n-q}, [\cdots,}^{i_{n-q}} [\cdots, \overbrace{[g_{k+p}, [\cdots,}^{i_{k+p}-1} [g_k, g_{k+p}] \cdots]. \tag{7.5}$$

On déduit que, si $\sum \alpha_i G_{i,n}$ est la décomposition sur la base de Hall de $w_n - g_n = G_n$, alors la décomposition sur la base de Hall de $[w_n, h_0] - [g_n, h_0]$ est $= -\sum \alpha_i [h_0, G_{i,n}]$. Il suffit alors de résoudre terme à terme par rapport aux g_i :

$$0 = (T_w^{-1})_n h_0 - (M_g^{-1})_n h_0 \tag{7.6}$$

$$= [w_n, h_0] + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n} L_{w_p} (T_w^{-1})_{n-p} h_0 - [g_n, h_0] - \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n+1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h_0 \tag{7.7}$$

$$= [w_n, h_0] - [g_n, h_0] + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n} L_{w_p} (M_g^{-1})_{n-p} h_0 - \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n+1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h_0 \tag{7.8}$$

$$= [w_n, h_0] - [g_n, h_0] + \sum_i \alpha_i [h_0, G_{i,n}]. \tag{7.9}$$

On a juste posé $w_p = g_p + G_p$ pour $1 \leq p \leq n$, donc $T_p^{-1} = M_p^{-1}$, et le membre de droite de la formule précédente est nécessairement $[h_0, G_n]$. De plus il n'est pas nécessaire de calculer $(M_g^{-1})_n h_0$ car la décomposition

$$[g_n, h_0] + \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{[g_{n+1}, [\cdots [g_1, h_0]]]}{m_1! \cdots m_{n-1}!}, \tag{7.10}$$

ne fournit pas de termes de la forme $[h_0,]$.

On obtient ainsi, pas à pas, la série génératrice de la transformation de Lie en fonction du produit croissant d'exponentielles. Cependant la réussite de cette technique tient à la forme très particulière des G_n. Pour s'en convaincre, on note que la même méthode pour calculer les mêmes relations mais dans le sens inverse bute sur le terme d'ordre 7. On a dans la base de Hall

$$g_7 = w_7 + \tfrac{1}{7}[w_1, w_6] + \tfrac{2}{7}[w_2, w_5] + \tfrac{3}{7}[w_3, w_4] + \tfrac{1}{42}[w_1, [w_1, w_5]] + \tfrac{11}{105}[w_2, [w_1, w_4]]$$
$$+ \tfrac{4}{35}[w_2, [w_2, w_3]] + \tfrac{5}{28}[w_3, [w_1, w_3]] - \tfrac{1}{21}[w_4, [w_1, w_2]] + \tfrac{1}{210}[w_1, [w_1, [w_1, w_4]]]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{1}{28}[w_2,[w_1,[w_1,w_3]]] + \tfrac{19}{210}[w_2,[w_2,[w_1,w_2]]] + \tfrac{31}{420}[w_3,[w_1,[w_1,w_2]]] \\
&+ \tfrac{13}{420}\underline{[[w_1,w_2],[w_1,w_3]]} + \tfrac{1}{840}[w_1,[w_1,[w_1,[w_1,w_3]]]] + \tfrac{1}{70}[w_2,[w_1,[w_1,[w_1,w_2]]]] \\
&+ \tfrac{11}{630}\underline{[[w_1,w_2],[w_1,[w_1,w_2]]]} + \tfrac{1}{2520}[w_1,[w_1,[w_1,[w_1,[w_1,w_2]]]]].
\end{aligned}
$$

g_7 contient deux termes dont le crochet de Lie avec z se décompose (pour le premier) en

$$[z,[[w_1,w_2],[w_1,w_3]]] = [[w_1,w_2],[z,[w_1,w_3]]] - [[w_1,w_3],[z,[w_1,w_2]]] \tag{7.11}$$

Ici, on a pris $h = z > w$. Le problème provient de l'utilisation de la base de Hall qui ne permet pas de factoriser les expressions précédentes, contrairement à la base de Lyndon.

7.1. Pseudo-factorisation et systèmes triangulaires

La base de Lyndon possède une propriété qui permet de contourner l'inconvénient précédent :

Lemme 18. — *Soit $X = \{a\}\bigcup X_1$ un alphabet et $a < b$ pour tout $b \in X_1$. Alors pour tout $x = \sum_i \alpha_i x_i \in L(X_1)$, la décomposition de $[a,x]$ sur la base de Lyndon $\mathcal{L}(X)$ est*

$$[a,x] = \sum_i \alpha_i [a, x_i].$$

Il suffit de montrer que pour tout $x_i \in \mathcal{L}(X_1)$, on a $[a,x_i] \in \mathcal{L}(X)$, ce qui est le cas, d'après la construction de la base de Lyndon, puisque $a < x_i$, pour l'ordre lexicographique sur les mots de Lyndon.

$\star^{\star}\star$

Le lemme précédent permet d'affirmer

Proposition 19. — *Soit $X = \{a\}\bigcup X_1$ un alphabet et $a < b$ pour tout $b \in X_1$. L'injection*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X_1) & \to & \mathcal{L}(X) \\ x & \mapsto & [a,x] \end{array} \tag{7.12}$$

se prolonge en un isomorphisme de R-module $L_a : L(X_1) \to L_a L(X_1) \subset L(X)$. La matrice de celui-ci étant l'identité, dans les bases de Lyndon correspondantes.

Dans le cas général, si X_1 et X_2 sont deux alphabets vérifiant $X_2 \setminus X_1 = x_2 \in X_2$, $L_{x_2} : L(X_1) \to L(X_2)$ est un morphisme injectif et la proposition 19 affirme que la matrice est la matrice identité en utilisant les bases de Lyndon.

Remarque. — Si on tente de rapprocher la proposition 19 et la proposition 6, on aboutit aux constatations suivantes.

Si X_1 est un alphabet de cardinal q, le sous-module de $\mathcal{L}_{q+1}(X)$, engendré par les éléments de degré partiel 1 en a est de dimension 2^q. En effet, utilisant l'isomorphisme entre les mots de Lyndon et la base de Lyndon de ce sous-module, un mot w de X^*_{q+1} de degré partiel 1 en a, est un mot de Lyndon s'il est plus petit que ses conjugués propres, c'est-à-dire s'il s'écrit $w = au$ où $u \in X^*_{1_q}$. Le nombre de tels mots est donc 2^q. L'image de $L_a : L_q(X_1) \to L_{q+1}(X)$ est un sous module de dimension l_q dans un module de dimension 2^q.

Dans la proposition 6, on établit un isomorphisme de sous-modules de dimension l_q et l'image est considérée dans la partie homogène de degré q de l'algèbre associative, laquelle est également de dimension 2^q.

⋆⋆⋆

On montre ici comment on peut résoudre un système de type triangulaire, avec ou sans factorisation. Un système triangulaire est un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_p & = & R_p \\ f_{p+1}+F_{p+1} & = & R_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{p+n}+F_{p+n} & = & R_{p+n} \end{array}\right. , \tag{7.13}$$

où les inconnues sont les f_i. Pour tout $p+1 \leq i \leq n$, $F_i \in L_R(f_p, \ldots, f_{i-1})$ et $R_i \in L_R(X)$ pour un certain anneau R et un certain alphabet X.

PROPOSITION 20. — *Tout système triangulaire peut être résolu par évaluations successives.*

On a immédiatement $f_p = R_p$ et il est possible de modifier le système (7.13) en

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_p & = & R_p \\ f_{p+1} & = & R_{p+1}-F_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{p+n} & = & R_{p+n}-F_{p+n} \end{array}\right. , \tag{7.14}$$

puis, on déduit que $f_{p+1} = R_{p+1}-F_{p+1} = R'_{p+1}$ dans lequel on a évalué F_{p+1} en $f_p = R_p$ (ici f_p est considéré comme une lettre ou un monôme de Lie). On procède ainsi par récurrence et à la fin on a $f_{p+n} = R_{p+n} - F_{p+n}$ dans lequel on a évalué F_{p+n} en $(f_p, \ldots, f_{p+n}) = (R'_p, \ldots, R'_{p+n})$.

On utilise cet algorithme pour inverser les relations trouvées lors, par exemple, du calcul d'une fonction génératrice par rapport à une autre.

Supposons maintenant que l'on sache que $(f_p, \ldots, f_{p+n}) = (R'_p, \ldots, R'_{p+n})$ satisfasse un système triangulaire factorisable — c'est le cas par exemple lorsqu'on cherche les relations de type Baker-Campbell-Hausdorff — de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} [a,f_p] & = & R_p \\ [a,f_{p+1}]+F_{p+1} & = & R_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [a,f_{p+n}]+F_{p+n} & = & R_{p+n} \end{array}\right. , \tag{7.15}$$

On a $[a, f_p] = R_p = \sum_i \alpha_i^{(p)}[a, t_i^{(p)}]$, ce qui donne $f_p = \sum_i \alpha_i^{(p)} t_i^{(p)}$. De la même manière, de $(f_p, \ldots, f_{p+n-1}) = (R'_p, \ldots, R'_{p+n-1})$, on déduit que $[a, f_{p+n}] = R''_{p+n}$ que l'on évalue en les valeurs précédemment trouvées et qui doit se transformer en $[a, f_{p+n}] = \sum_i \alpha_i^{(p+n)}[a, t_i^{(p+n)}]$. On termine, enfin, par $f_{p+n} = \sum_i \alpha_i^{(p+n)} t_i^{(p+n)}$.

Si une des équations ne se factorise pas, c'est que le système (7.15) n'a pas de solutions.

7.2. Représentation des transformations canoniques

Soit $\mathbf{G}$ le groupe des transformations canoniques engendré par les exponentielles (ou par les transformations de type T_f, ou de type M_g).

Lemme 21. — *Soit $T = \exp(L_k)$ (resp. $T = T_w^{-1}$, $T = M_g^{-1}$) et $A = Ta = \sum_n T_n a$. Dans la décomposition sur la base de Lyndon, on a : $A_n = -[a, k_n] + K_n$ (resp. $A_n = -[a, w_n] + W_n$, $A_n = -[a, g_n] + G_n$) où $K_n \in L(a, k_1, \ldots k_{n-1})$ (resp. $W_n \in L(a, w_1, \ldots w_{n-1})$, $G_n \in L(a, g_1, \ldots g_{n-1})$).*

Il suffit d'exprimer $Ta = \sum_{n\geq 0}(Ta)_n$ et de considérer la forme développée de $(T_a)_n$ suivant les cas.

⁂

On peut généraliser le lemme précédent à $T \in \mathbf{G}$. Ces considérations permettent alors d'exprimer n'importe quelle transformation de $\mathbf{G}$ comme une des transformations d'un des trois types.

Proposition 22. — *Soit $T \in \mathbf{G}$. On peut exprimer T comme une exponentielle, une transformation de type T_f^{-1} ou un produit infini d'exponentielles de type M_g^{-1}, le calcul des séries génératrices s'effectuant par résolution d'un système triangulaire factorisable.*

Considérons $T \in \mathbf{G}$ et le développement de $A = Ta$ sur la base de Lyndon de l'algèbre de Lie libre sur un alphabet $X = \{a\} \bigcup X_1$ contenant toutes les lettres nécessaires. On a alors

$$A_1 = T_1 a = \sum_i \alpha_i [a, t_i], \tag{7.16}$$

où $t_i \in L(X_1)$, la liste pouvant éventuellement être vide. Si l'on veut exprimer T comme une exponentielle, ou une transformation de Lie, ou une transformation de Dragt-Finn on a nécessairement k_1 (resp. g_1, w_1) $= -\sum_i \alpha_i t_i$.

Supposons, pour fixer les notations, que l'on veuille exprimer T comme l'exponentielle $\exp(L_k)$. Soit $Ta = \sum_{n\geq 0} A_n$ et posons $\exp(L_k)a = \sum_{n\geq 0} E_n$. Le calcul des k_n successifs s'effectue en résolvant le système triangulaire

$$\left\{\begin{array}{ccccl} A_1 & = & E_1 & = & -[a, k_1] \\ A_2 & = & E_2 & = & -[a, k_2] + R_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_n & = & E_n & = & -[a, k_n] + R_n \end{array}\right. \tag{7.17}$$

qui a une solution d'après la partie précédente.

7.3. Exemples

La formule (6.44) donne l'expression de w en fonction de g. On est typiquement dans le cas d'un système triangulaire.

$w_1 = g_1$
$w_2 = g_2$
$w_3 = g_3 - \frac{1}{3}\,[g_1,\, g_2]$

$$w_4 = g_4 - \tfrac{1}{4}\,[g_1,\, g_3]$$
$$w_5 = g_5 - \tfrac{1}{5}\,[g_1,\, g_4] - \tfrac{2}{5}\,[g_2,\, g_3] + \tfrac{1}{10}\,[[g_1,\, g_2],\, g_2]$$
$$w_6 = g_6 - \tfrac{1}{6}\,[g_1,\, g_5] - \tfrac{1}{3}\,[g_2,\, g_4] + \tfrac{1}{6}\,[g_1,\, [g_2,\, g_3]] + \tfrac{1}{6}\,[[g_1,\, g_3],\, g_2]$$

On peut inverser ce système par évaluations successives et on trouve, pour les 6 premiers termes de la série génératrice g,

$$g_1 = w_1$$
$$g_2 = w_2$$
$$g_3 = w_3 + \tfrac{1}{3}\,[w_1,\, w_2]$$
$$g_4 = w_4 + \tfrac{1}{4}\,[w_1,\, w_3] + \tfrac{1}{12}\,[w_1,\, [w_1,\, w_2]]$$
$$g_5 = w_5 + \tfrac{1}{5}\,[w_1,\, w_4] + \tfrac{2}{5}\,[w_2,\, w_3] + \tfrac{1}{20}\,[w_1,\, [w_1,\, w_3]] - \tfrac{7}{30}\,[[w_1,\, w_2],\, w_2] + \tfrac{1}{60}\,[w_1,\, [w_1,\, [w_1,\, w_2]]]$$
$$g_6 = w_6 + \tfrac{1}{6}\,[w_1,\, w_5] + \tfrac{1}{3}\,[w_2,\, w_4] + \tfrac{1}{30}\,[w_1,\, [w_1,\, w_4]] - \tfrac{1}{10}\,[w_1,\, [w_2,\, w_3]] - \tfrac{1}{4}\,[[w_1,\, w_3],\, w_2] + \tfrac{1}{120}\,[w_1,\, [w_1,\, [w_1,\, w_3]]] - \tfrac{1}{15}\,[w_1,\, [[w_1,\, w_2],\, w_2]] + \tfrac{1}{360}\,[w_1,\, [w_1,\, [w_1,\, [w_1,\, w_2]]]]$$

Calculons, à l'ordre 5, $\exp(\sum_{p\geq 1} \varepsilon^p L_{k_p})\varepsilon^0 a$ où les k_i sont de poids i et a est de poids 0. On obtient en développant par rapport à ε, $\sum_{n\geq 0} \varepsilon^n A_n$ où

$$A_0 = a$$
$$A_1 = -\,[a,\, k_1]$$
$$A_2 = -[a,\, k_2] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, k_1],\, k_1]$$
$$A_3 = -[a,\, k_3] + \tfrac{1}{2}\,[a,\, [k_1,\, k_2]] + [[a,\, k_2],\, k_1] - \tfrac{1}{6}\,[[[a,\, k_1],\, k_1],\, k_1]$$
$$A_4 = -[a,\, k_4] + \tfrac{1}{2}\,[a,\, [k_1,\, k_3]] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, k_2],\, k_2] + [[a,\, k_3],\, k_1] - \tfrac{1}{6}\,[a,\, [k_1,\, [k_1,\, k_2]]] - \tfrac{1}{2}\,[[a,\, [k_1,\, k_2]],\, k_1] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\, k_2],\, k_1],\, k_1] + \tfrac{1}{24}\,[[[[a,\, k_1],\, k_1],\, k_1],\, k_1]$$
$$A_5 = -[a,\, k_5] + \tfrac{1}{2}\,[a,\, [k_1,\, k_4]] + \tfrac{1}{2}\,[a,\, [k_2,\, k_3]] + [[a,\, k_3],\, k_2] + [[a,\, k_4],\, k_1] - \tfrac{1}{6}\,[a,\, [k_1,\, [k_1,\, k_3]]] - \tfrac{1}{6}\,[a,\, [[k_1,\, k_2],\, k_2]] - \tfrac{1}{2}\,[[a,\, k_2],\, [k_1,\, k_2]] - \tfrac{1}{2}\,[[a,\, [k_1,\, k_3]],\, k_1] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\, k_2],\, k_2],\, k_1] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\, k_3],\, k_1],\, k_1] + \tfrac{1}{24}\,[a,\, [k_1,\, [k_1,\, [k_1,\, k_2]]]] + \tfrac{1}{6}\,[[a,\, [k_1,\, [k_1,\, k_2]]],\, k_1] + \tfrac{1}{4}\,[[[a,\, [k_1,\, k_2]],\, k_1],\, k_1] + \tfrac{1}{6}\,[[[[a,\, k_2],\, k_1],\, k_1],\, k_1] - \tfrac{1}{120}\,[[[[[a,\, k_1],\, k_1],\, k_1],\, k_1],\, k_1]$$

D'autre part calculons au même ordre $\exp(\varepsilon L_y)\exp(\varepsilon L_x)\varepsilon^0 a = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n B_n$

$$B_0 = a$$
$$B_1 = -[a,\, x] - [a,\, y]$$
$$B_2 = +[a,\, [x,\, y]] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, x],\, x] + [[a,\, y],\, x] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, y],\, y]$$
$$B_3 = -\tfrac{1}{2}\,[a,\, [x,\, [x,\, y]]] - \tfrac{1}{2}\,[a,\, [[x,\, y],\, y]] - [[a,\, y],\, [x,\, y]] - [[a,\, [x,\, y]],\, x] - \tfrac{1}{6}\,[[[a,\, x],\, x],\, x] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\, y],\, x],\, x] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\, y],\, y],\, x] - \tfrac{1}{6}\,[[[a,\, y],\, y],\, y]$$
$$B_4 = +\tfrac{1}{6}\,[a,\, [x,\, [x,\, [x,\, y]]]] + \tfrac{1}{4}\,[a,\, [x,\, [[x,\, y],\, y]]] + \tfrac{1}{6}\,[a,\, [[[x,\, y],\, y],\, y]] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, y],\, [x,\, [x,\, y]]] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, y],\, [[x,\, y],\, y]] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\, [x,\, y]],\, [x,\, y]]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{1}{2}\,[[[a,\,y],\,y],\,[x,\,y]] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\,[x,\,[x,\,y]]],\,x] + \tfrac{1}{2}\,[[a,\,[[x,\,y],\,y]],\,x] \\
&+ [[[a,\,y],\,[x,\,y]],\,x] + \tfrac{1}{2}\,[[[a,\,[x,\,y]],\,x],\,x] + \tfrac{1}{24}\,[[[[a,\,x],\,x],\,x],\,x] \\
&+ \tfrac{1}{6}\,[[[[a,\,y],\,x],\,x],\,x] + \tfrac{1}{4}\,[[[[a,\,y],\,y],\,x],\,x] + \tfrac{1}{6}\,[[[[a,\,y],\,y],\,y],\,x] \\
&+ \tfrac{1}{24}\,[[[[a,\,y],\,y],\,y],\,y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_5 = &-\tfrac{1}{24}\,[a,\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,y]]]]] - \tfrac{1}{12}\,[a,\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]]] - \tfrac{1}{12}\,[a,\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]] \\
&- \tfrac{1}{4}\,[a,\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]] - \tfrac{1}{6}\,[a,\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]]] - \tfrac{1}{24}\,[a,\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y]] \\
&- \tfrac{1}{6}\,[[a,\,y],\,[x,\,[x,\,[x,\,y]]]] - \tfrac{1}{4}\,[[a,\,y],\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]] - \tfrac{1}{6}\,[[a,\,y],\,[[[x,\,y],\,y],\,y]] \\
&- \tfrac{1}{2}\,[[a,\,[x,\,y]],\,[x,\,[x,\,y]]] - \tfrac{1}{4}\,[[[a,\,y],\,y],\,[x,\,[x,\,y]]] - \tfrac{1}{4}\,[[[a,\,y],\,y],\,[[x,\,y],\,y]] \\
&- \tfrac{1}{2}\,[[a,\,[[x,\,y],\,y]],\,[x,\,y]] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\,y],\,[x,\,y]],\,[x,\,y]] - \tfrac{1}{6}\,[[[[a,\,y],\,y],\,y],\,[x,\,y]] \\
&- \tfrac{1}{6}\,[[a,\,[x,\,[x,\,[x,\,y]]]],\,x] - \tfrac{1}{4}\,[[a,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]],\,x] - \tfrac{1}{6}\,[[a,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]],\,x] \\
&- \tfrac{1}{2}\,[[[a,\,y],\,[x,\,[x,\,y]]],\,x] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\,y],\,[[x,\,y],\,y]],\,x] - \tfrac{1}{2}\,[[[a,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]],\,x] \\
&- \tfrac{1}{2}\,[[[[a,\,y],\,y],\,[x,\,y]],\,x] - \tfrac{1}{4}\,[[[a,\,[x,\,[x,\,y]]],\,x],\,x] - \tfrac{1}{4}\,[[[a,\,[[x,\,y],\,y]],\,x],\,x] \\
&- \tfrac{1}{2}\,[[[[a,\,y],\,[x,\,y]],\,x],\,x] - \tfrac{1}{6}\,[[[[a,\,[x,\,y]],\,x],\,x],\,x] - \tfrac{1}{120}\,[[[[[a,\,x],\,x],\,x],\,x],\,x] \\
&- \tfrac{1}{24}\,[[[[[a,\,y],\,x],\,x],\,x],\,x] - \tfrac{1}{12}\,[[[[[a,\,y],\,y],\,x],\,x],\,x] - \tfrac{1}{12}\,[[[[[a,\,y],\,y],\,y],\,x],\,x] \\
&- \tfrac{1}{24}\,[[[[[a,\,y],\,y],\,y],\,y],\,x] - \tfrac{1}{120}\,[[[[[a,\,y],\,y],\,y],\,y],\,y]
\end{aligned}
$$

On trouve un système d'équations triangulaire, factorisable par a, que l'on peut résoudre par rapport aux variables $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$,

$$
\begin{aligned}
k_1 &= x + y \\
k_2 &= -\tfrac{1}{2}\,[x,\,y] \\
k_3 &= \tfrac{1}{12}\,[x,\,[x,\,y]] + \tfrac{1}{12}\,[[x,\,y],\,y] \\
k_4 &= -\tfrac{1}{24}\,[x,\,[[x,\,y],\,y]] \\
k_5 &= -\tfrac{1}{720}\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,y]]]] + \tfrac{1}{180}\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]] + \tfrac{1}{180}\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]] \\
&\quad + \tfrac{1}{120}\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]] + \tfrac{1}{360}\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]] - \tfrac{1}{720}\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y] \\
k_6 &= \tfrac{1}{1440}\,[x,\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]]] - \tfrac{1}{360}\,[x,\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]] - \tfrac{1}{240}\,[x,\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]] \\
&\quad - \tfrac{1}{720}\,[x,\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]]] + \tfrac{1}{1440}\,[x,\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y]]
\end{aligned}
$$

qui n'est autre que la formule de Campbell-Hausdorff à l'ordre 6.

De la même façon, on trouve la série génératrice de l'exponentielle, en fonction de celle de la transformation de Lie,

$$
\begin{aligned}
k_1 &= w_1 \\
k_2 &= w_2 \\
k_3 &= w_3 - \tfrac{1}{6}\,[w_1, w_2] \\
k_4 &= w_4 - \tfrac{1}{4}\,[w_1, w_3] \\
k_5 &= w_5 - \tfrac{3}{2}\,[w_1, w_4] - \tfrac{1}{2}\,[w_2, w_3] + \tfrac{1}{120}\,[w_1, [w_1, w_3]] + \tfrac{1}{60}\,[[w_1, w_2], w_2] \\
&\quad + \tfrac{1}{360}\,[w_1, [w_1, [w_1, w_2]]]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
k_6 = {} & w_6 - \tfrac{1}{3}\,[w_1, w_5] - \tfrac{1}{6}\,[w_2, w_4] + \tfrac{1}{60}\,[w_1,[w_1,w_4]] + \tfrac{1}{30}\,[w_1,[w_2,w_3]] + \tfrac{1}{24}\,[[w_1,w_3],w_2] \\
& + \tfrac{1}{240}\,[w_1,[w_1,[w_1,w_3]]] - \tfrac{1}{180}\,[w_1,[[w_1,w_2],w_2]] \\
k_7 = {} & w_7 - \tfrac{5}{14}\,[w_1,\ w_6] - \tfrac{3}{14}\,[w_2,w_5] - \tfrac{1}{14}\,[w_3,w_4] + \tfrac{1}{42}\,[w_1,[w_1,w_5]] + \tfrac{1}{21}\,[w_1,[w_2,w_4]] \\
& - \tfrac{1}{420}\,[w_2,[w_2,w_3]] + \tfrac{5}{168}\,[[w_1,w_3],w_3] + \tfrac{3}{70}\,[[w_1,w_4],w_2] + \tfrac{1}{210}\,[w_1,[w_1,[w_1,w_4]]] \\
& - \tfrac{11}{2520}\,[w_1,[w_1,[w_2,w_3]]] - \tfrac{19}{1260}\,[w_1,[[w_1,w_3],w_2]] - \tfrac{1}{315}\,[[w_1,w_2],[w_1,w_3]] \\
& + \tfrac{1}{630}\,[[[w_1,w_2],w_2],w_2] - \tfrac{1}{5040}\,[w_1,[w_1,[w_1,[w_1,w_3]]]] - \tfrac{1}{2520}\,[w_1,[w_1,[[w_1,w_2],w_2]]] \\
& + \tfrac{1}{1890}\,[[w_1,[w_1,w_2]],[w_1,w_2]] - \tfrac{1}{15120}\,[w_1,[w_1,\ [w_1,[w_1,[w_1,w_2]]]]]
\end{aligned}$$

puis en fonction de celle de la transformation de Dragt-Finn,

$$\begin{aligned}
k_1 = {} & g_1 \\
k_2 = {} & g_2 \\
k_3 = {} & g_3 - \tfrac{1}{2}\,[g_1,g_2] \\
k_4 = {} & g_4 - \tfrac{1}{2}\,[g_1,g_3] + \tfrac{1}{12}\,[g_1,[g_1,g_2]] \\
k_5 = {} & g_5 - \tfrac{1}{2}\,[g_1,g_4] - \tfrac{1}{2}\,[g_2,g_3] + \tfrac{1}{12}\,[g_1,[g_1,g_3]] + \tfrac{1}{12}\,[[g_1,g_2],g_2] \\
k_6 = {} & g_6 - \tfrac{1}{2}\,[g_1,g_5] - \tfrac{1}{2}\,[g_2,\ g_4] + \tfrac{1}{12}\,[g_1,[g_1,g_4]] + \tfrac{1}{3}\,[g_1,[g_2,g_3]] + \tfrac{1}{6}\,[[g_1,g_3],g_2] \\
& - \tfrac{1}{24}\,[g_1,[[g_1,g_2],g_2]] - \tfrac{1}{720}\,[g_1,[g_1,[g_1,[g_1,g_2]]]] \\
k_7 = {} & g_7 - \tfrac{1}{2}\,[g_1,g_6] - \tfrac{1}{2}\,[g_2,g_5] - \tfrac{1}{2}\,[g_3,g_4] + \tfrac{1}{12}\,[g_1,[g_1,g_5]] + \tfrac{1}{3}\,[g_1,[g_2,g_4]] + \tfrac{1}{12}\,[g_2,[g_2,g_3]] \\
& + \tfrac{1}{12}\,[[g_1,g_3],g_3] + \tfrac{1}{6}\,[[g_1,g_4],g_2] - \tfrac{1}{12}\,[g_1,\ [g_1,[g_2,g_3]]] - \tfrac{1}{12}\,[g_1,[[g_1,g_3],g_2]] \\
& - \tfrac{1}{720}\,[g_1,[g_1,\ [g_1,[g_1,g_3]]]] + \tfrac{1}{180}\,[g_1,[g_1,[[g_1,g_2],\ g_2]]] + \tfrac{1}{360}\,[[g_1,[g_1,g_2]],[g_1,g_2]]
\end{aligned}$$

La série génératrice de la transformation de Dragt-Finn en fonction de la série génératrice de l'exponentielle,

$$\begin{aligned}
g_1 = {} & k_1 \\
g_2 = {} & k_2 \\
g_3 = {} & k_3 + \tfrac{1}{2}\,[k_1,k_2] \\
g_4 = {} & k_4 + \tfrac{1}{2}\,[k_1,k_3] + \tfrac{1}{6}\,[k_1,[k_1,k_2]] \\
g_5 = {} & k_5 + \tfrac{1}{2}\,[k_1,k_4] + \tfrac{1}{2}\,[k_2,k_3] + \tfrac{1}{6}\,[k_1,[k_1,k_3]] - \tfrac{1}{3}\,[[k_1,k_2],k_2] + \tfrac{1}{24}\,[k_1,[k_1,[k_1,k_2]]] \\
g_6 = {} & k_6 + \tfrac{1}{2}\,[k_1,k_5] + \tfrac{1}{2}\,[k_2,k_4] + \tfrac{1}{6}\,[k_1,[k_1,k_4]] - \tfrac{1}{12}\,[k_1,[k_2,k_3]] - \tfrac{5}{12}\,[[k_1,k_3],k_2] \\
& + \tfrac{1}{24}\,[k_1,[k_1,[k_1,k_3]]] - \tfrac{1}{8}\,[k_1,[[k_1,k_2],k_2]] + \tfrac{1}{120}\,[k_1,[k_1,[k_1,[k_1,k_2]]]] \\
g_7 = {} & k_7 + \tfrac{1}{2}\,[k_1,k_6] + \tfrac{1}{2}\,[k_2,k_5] + \tfrac{1}{2}\,[k_3,k_4] + \tfrac{1}{6}\,[k_1,[k_1,k_5]] + \tfrac{1}{6}\,[k_1,[k_2,k_4]] \\
& + \tfrac{1}{6}\,[k_2,\ [k_2,k_3]] - \tfrac{1}{3}\,[[k_1,k_3],k_3] - \tfrac{1}{6}\,[[k_1,k_4],k_2] + \tfrac{1}{24}\,[k_1,[k_1,[k_1,k_4]]] \\
& - \tfrac{1}{8}\,[k_1,[k_1,[k_2,k_3]]] - \tfrac{1}{4}\,[k_1,[[k_1,k_3],k_2]] + \tfrac{1}{8}\,[[k_1,k_2],[k_1,k_3]] + \tfrac{1}{8}\,[[[k_1,k_2],k_2],k_2] \\
& + \tfrac{1}{120}\,[k_1,[k_1,[k_1,[k_1,k_3]]]] - \tfrac{1}{30}\,[k_1,[k_1,[[k_1,k_2],k_2]]] - \tfrac{1}{60}\,[[k_1,[k_1,k_2]],[k_1,k_2]] \\
& + \tfrac{1}{720}\,[k_1,[k_1,[k_1,[k_1,\ [k_1,k_2]]]]]
\end{aligned}$$

La série génératrice de la transformation de Lie en fonction de celle de l'exponentielle,

$$
\begin{aligned}
w_1 &= k_1 \\
w_2 &= k_2 \\
w_3 &= k_3 + \tfrac{1}{6}\,[k_1,k_2] \\
w_4 &= k_4 + \tfrac{1}{4}\,[k_1,k_3] + \tfrac{1}{24}\,[k_1,\,[k_1,k_2]] \\
w_5 &= k_5 + \tfrac{3}{2}\,[k_1,k_4] + \tfrac{1}{2}\,[k_2,k_3] + \tfrac{1}{15}\,[k_1,[k_1,k_3]] - \tfrac{1}{30}\,[[k_1,k_2],k_2] + \tfrac{1}{120}\,[k_1,\,[k_1,[k_1,k_2]]] \\
w_6 &= k_6 + \tfrac{1}{3}\,[k_1,k_5] + \tfrac{1}{6}\,[k_2,k_4] + \tfrac{1}{12}\,[k_1,[k_1,k_4]] - \tfrac{1}{12}\,[[k_1,k_3],k_2] + \tfrac{1}{72}\,[k_1,[k_1,[k_1,k_3]]] \\
&\quad - \tfrac{1}{72}\,[k_1,\,[[k_1,k_2],k_2]] + \tfrac{1}{720}\,[k_1,[k_1,[k_1,[k_1,k_2]]]] \\
w_7 &= k_7 + \tfrac{5}{14}\,[k_1,k_6] + \tfrac{3}{14}\,[k_2,k_5] + \tfrac{1}{14}\,[k_3,k_4] + \tfrac{2}{21}\,[k_1,[k_1,k_5]] + \tfrac{1}{42}\,[k_1,[k_2,k_4]] \\
&\quad + \tfrac{1}{42}\,[k_2,[k_2,k_3]] - \tfrac{1}{21}\,[[k_1,k_3],k_3] - \tfrac{2}{21}\,[[k_1,k_4],k_2] + \tfrac{1}{56}\,[k_1,[k_1,[k_1,k_4]]] \\
&\quad - \tfrac{1}{168}\,[k_1,[k_1,[k_2,k_3]]] - \tfrac{1}{28}\,[k_1,[[k_1,k_3],k_2]] - \tfrac{1}{168}\,[[k_1,k_2],[k_1,k_3]] \\
&\quad + \tfrac{1}{168}\,[[[k_1,k_2],k_2],k_2] + \tfrac{1}{420}\,[k_1,[k_1,[k_1,[k_1,k_3]]]] - \tfrac{1}{280}\,[k_1,[k_1,[[k_1,\,k_2],k_2]]] \\
&\quad + \tfrac{1}{840}\,[[k_1,[k_1,k_2]],[k_1,k_2]] + \tfrac{1}{5040}\,[k_1,[k_1,\,[k_1,[k_1,[k_1,k_2]]]]]
\end{aligned}
$$

7.3.1. Composition de transformations

La composée des deux transformations de Lie inverses T_u^{-1} et T_v^{-1} est T_w^{-1}, où

$$
\begin{aligned}
w_1 &= u_1 + v_1 \\
w_2 &= u_2 + v_2 + \tfrac{1}{2}\,[u_1,v_1] \\
w_3 &= u_3 + v_3 + \tfrac{2}{3}\,[u_1,v_2] + \tfrac{1}{3}\,[u_2,v_1] + \tfrac{1}{6}\,[u_1,[u_1,v_1]] \\
w_4 &= u_4 + v_4 + \tfrac{3}{4}\,[u_1,v_3] + \tfrac{1}{2}\,[u_2,v_2] + \tfrac{1}{4}\,[u_3,v_1] + \tfrac{1}{4}\,[u_1,[u_1,v_2]] + \tfrac{1}{12}\,[u_1,[u_2,v_1]] \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\,[[u_1,\,v_1],u_2] + \tfrac{1}{24}\,[u_1,[u_1,[u_1,v_1]]] \\
w_5 &= u_5 + v_5 + \tfrac{4}{5}\,[u_1,v_4] + \tfrac{3}{5}\,[u_2,v_3] + \tfrac{2}{5}\,[u_3,v_2] + \tfrac{1}{5}\,[u_4,v_1] + \tfrac{3}{2}\,[u_1,[u_1,v_3]] \\
&\quad + \tfrac{2}{15}\,[u_1,[u_2,v_2]] + \tfrac{1}{20}\,[u_1,[u_3,v_1]] + \tfrac{1}{2}\,[u_2,[u_2,v_1]] - \tfrac{3}{20}\,[[u_1,v_1],u_3] - \tfrac{4}{15}\,[[u_1,v_2],u_2] \\
&\quad + \tfrac{1}{15}\,[u_1,[u_1,[u_1,v_2]]] + \tfrac{1}{60}\,[u_1,[u_1,[u_2,\,v_1]]] - \tfrac{1}{12}\,[u_1,[[u_1,v_1],u_2]] \\
&\quad - \tfrac{1}{20}\,[[u_1,u_2],[u_1,v_1]] + \tfrac{1}{120}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,v_1]]]] \\
w_6 &= u_6 + v_6 + \tfrac{5}{6}\,[u_1,\,v_5] + \tfrac{2}{3}\,[u_2,v_4] + \tfrac{1}{2}\,[u_3,v_3] + \tfrac{1}{3}\,[u_4,v_2] + \tfrac{1}{6}\,[u_5,v_1] + \tfrac{1}{3}\,[u_1,[u_1,v_4]] \\
&\quad + \tfrac{1}{6}\,[u_1,[u_2,v_3]] + \tfrac{1}{12}\,[u_1,[u_3,v_2]] + \tfrac{1}{30}\,[u_1,[u_4,v_1]] + \tfrac{1}{6}\,[u_2,[u_2,v_2]] + \tfrac{1}{15}\,[u_2,[u_3,v_1]] \\
&\quad - \tfrac{2}{15}\,[[u_1,v_1],u_4] - \tfrac{1}{4}\,[[u_1,v_2],u_3] - \tfrac{1}{3}\,[[u_1,v_3],u_2] - \tfrac{1}{2}\,[[u_2,v_1],u_3] \\
&\quad + \tfrac{1}{12}\,[u_1,[u_1,[u_1,v_3]]] + \tfrac{1}{36}\,[u_1,\,[u_1,[u_2,v_2]]] + \tfrac{1}{120}\,[u_1,[u_1,[u_3,v_1]]] \\
&\quad + \tfrac{1}{60}\,[u_1,[u_2,[u_2,v_1]]] - \tfrac{3}{40}\,[u_1,[[u_1,v_1],u_3]] - \tfrac{5}{36}\,[u_1,[[u_1,v_2],u_2]] \\
&\quad - \tfrac{1}{12}\,[[u_1,u_2],[u_1,v_2]] - \tfrac{1}{20}\,[[u_1,u_3],[u_1,v_1]] - \tfrac{1}{45}\,[[u_1,[u_2,v_1]],u_2] \\
&\quad + \tfrac{2}{45}\,[[[u_1,v_1],u_2],u_2] + \tfrac{1}{72}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,v_2]]]] + \tfrac{1}{360}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_2,v_1]]]] \\
&\quad - \tfrac{1}{40}\,[u_1,[u_1,[[u_1,v_1],\,u_2]]] - \tfrac{7}{360}\,[u_1,[[u_1,u_2],[u_1,v_1]]] + \tfrac{1}{90}\,[[u_1,[u_1,v_1]],[u_1,u_2]] \\
&\quad + \tfrac{1}{720}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,v_1]]]]] \\
w_7 &= u_7 + v_7 + \tfrac{6}{7}\,[u_1,v_6] + \tfrac{5}{7}\,[u_2,v_5] + \tfrac{4}{7}\,[u_3,v_4] + \tfrac{3}{7}\,[u_4,v_3] + \tfrac{2}{7}\,[u_5,v_2] + \tfrac{1}{7}\,[u_6,v_1] \\
&\quad + \tfrac{5}{14}\,[u_1,[u_1,v_5]] + \tfrac{4}{21}\,[u_1,[u_2,v_4]] + \tfrac{3}{28}\,[u_1,[u_3,v_3]] + \tfrac{2}{35}\,[u_1,[u_4,v_2]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{42}\,[u_1,[u_5,v_1]]+\tfrac{3}{14}\,[u_2,[u_2,v_3]]+\tfrac{4}{35}\,[u_2,[u_3,v_2]]+\tfrac{1}{21}\,[u_2,[u_4,v_1]]\\
&+\tfrac{1}{14}\,[u_3,[u_3,v_1]]-\tfrac{5}{42}\,[[u_1,v_1],u_5]-\tfrac{8}{35}\,[[u_1,v_2],u_4]-\tfrac{9}{28}\,[[u_1,v_3],u_3]\\
&-\tfrac{8}{21}\,[[u_1,v_4],u_2]-\tfrac{2}{21}\,[[u_2,v_1],u_4]-\tfrac{6}{35}\,[[u_2,v_2],u_3]+\tfrac{2}{21}\,[u_1,[u_1,[u_1,v_4]]]\\
&+\tfrac{1}{28}\,[u_1,\,[u_1,[u_2,v_3]]]+\tfrac{1}{70}\,[u_1,[u_1,[u_3,v_2]]]+\tfrac{1}{210}\,[u_1,[u_1,[u_4,v_1]]]\\
&+\tfrac{1}{35}\,[u_1,[u_2,[u_2,v_2]]]+\tfrac{1}{105}\,[u_1,\,[u_2,[u_3,v_1]]]+\tfrac{1}{42}\,[u_2,[u_2,[u_2,v_1]]]\\
&-\tfrac{1}{15}\,[u_1,[[u_1,v_1],u_4]]-\tfrac{9}{70}\,[u_1,[[u_1,v_2],u_3]]-\tfrac{5}{28}\,[u_1,[[u_1,v_3],u_2]]\\
&-\tfrac{4}{105}\,[u_1,[[u_2,v_1],u_3]]-\tfrac{3}{28}\,[[u_1,u_2],[u_1,v_3]]-\tfrac{3}{35}\,[[u_1,u_3],[u_1,v_2]]\\
&-\tfrac{1}{42}\,[[u_1,\,u_3],[u_2,v_1]]-\tfrac{1}{21}\,[[u_1,u_4],[u_1,v_1]]+\tfrac{1}{21}\,[[u_1,v_1],[u_2,u_3]]\\
&-\tfrac{4}{105}\,[[u_1,[u_2,v_2]],u_2]-\tfrac{1}{84}\,[[u_1,[u_3,v_1]],u_2]+\tfrac{1}{12}\,[[[u_1,v_1],u_3],u_2]\\
&+\tfrac{8}{105}\,[[[u_1,v_2],\,u_2],u_2]+\tfrac{1}{56}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,v_3]]]]+\tfrac{1}{210}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_2,v_2]]]]\\
&+\tfrac{1}{840}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_3,v_1]]]]+\tfrac{1}{420}\,[u_1,[u_1,[u_2,[u_2,v_1]]]]-\tfrac{19}{840}\,[u_1,[u_1,[[u_1,v_1],\,u_3]]]\\
&-\tfrac{3}{70}\,[u_1,[u_1,[[u_1,v_2],u_2]]]-\tfrac{1}{30}\,[u_1,[[u_1,u_2],\,[u_1,v_2]]]-\tfrac{2}{105}\,[u_1,[[u_1,u_3],[u_1,v_1]]]\\
&-\tfrac{1}{140}\,[u_1,[[u_1,[u_2,v_1]],u_2]]+\tfrac{11}{420}\,[u_1,[[[u_1,v_1],u_2],u_2]]-\tfrac{1}{252}\,[[u_1,u_2],[u_1,[u_2,v_1]]]\\
&+\tfrac{2}{63}\,[[u_1,u_2],[[u_1,v_1],u_2]]+\tfrac{1}{84}\,[[u_1,[u_1,v_1]],[u_1,u_3]]+\tfrac{2}{105}\,[[u_1,[u_1,v_2]],[u_1,u_2]]\\
&+\tfrac{1}{84}\,[[[u_1,u_2],u_2],[u_1,v_1]]+\tfrac{1}{420}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,v_2]]]]]\\
&+\tfrac{1}{2520}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,[u_2,v_1]]]]]-\tfrac{1}{180}\,[u_1,[u_1,\,[u_1,[[u_1,v_1],u_2]]]]\\
&-\tfrac{1}{210}\,[u_1,[u_1,[[u_1,u_2],[u_1,v_1]]]]+\tfrac{1}{180}\,[u_1,\,[[u_1,[u_1,v_1]],[u_1,u_2]]]\\
&+\tfrac{1}{504}\,[[u_1,[u_1,u_2]],[u_1,[u_1,v_1]]]+\tfrac{1}{5040}\,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,[u_1,v_1]]]]]]
\end{aligned}
$$

On en déduit la transformation de Lie T_v sous forme de transformation de Lie inverse $T_{v'}^{-1}$, en résolvant le système précédent, où $w=0$, par rapport aux u_i

$$
\begin{aligned}
v'_1 &= -v_1\\
v'_2 &= -v_2\\
v'_3 &= -v_3+\tfrac{1}{3}\,[v_1,v_2]\\
v'_4 &= -v_4+\tfrac{1}{2}\,[v_1,v_3]-\tfrac{1}{12}\,[v_1,[v_1,v_2]]\\
v'_5 &= -v_5+\tfrac{3}{5}\,[v_1,v_4]+\tfrac{1}{5}\,[v_2,v_3]-\tfrac{3}{20}\,[v_1,[v_1,v_3]]+\tfrac{1}{30}\,[[v_1,v_2],v_2]+\tfrac{1}{60}\,[v_1,[v_1,[v_1,v_2]]]\\
v'_6 &= -v_6+\tfrac{2}{3}\,[v_1,v_5]+\tfrac{1}{3}\,[v_2,v_4]-\tfrac{1}{5}\,[v_1,[v_1,v_4]]-\tfrac{1}{15}\,[v_1,[v_2,v_3]]+\tfrac{1}{12}\,[[v_1,v_3],v_2]\\
&\quad+\tfrac{1}{30}\,[v_1,[v_1,[v_1,v_3]]]-\tfrac{1}{60}\,[v_1,\,[[v_1,v_2],v_2]]-\tfrac{1}{360}\,[v_1,[v_1,[v_1,[v_1,v_2]]]]\\
v'_7 &= -v_7+\tfrac{5}{7}\,[v_1,v_6]+\tfrac{3}{7}\,[v_2,v_5]+\tfrac{1}{7}\,[v_3,v_4]-\tfrac{5}{21}\,[v_1,[v_1,v_5]]-\tfrac{1}{7}\,[v_1,\,[v_2,v_4]]\\
&\quad-\tfrac{3}{70}\,[v_2,[v_2,v_3]]+\tfrac{1}{28}\,[[v_1,v_3],v_3]+\tfrac{11}{105}\,[[v_1,v_4],v_2]+\tfrac{1}{21}\,[v_1,[v_1,[v_1,v_4]]]\\
&\quad+\tfrac{1}{84}\,[v_1,\,[v_1,[v_2,v_3]]]-\tfrac{19}{420}\,[v_1,[[v_1,v_3],v_2]]-\tfrac{1}{105}\,[[v_1,v_2],[v_1,v_3]]\\
&\quad+\tfrac{1}{210}\,[[[v_1,v_2],v_2],v_2]-\tfrac{1}{168}\,[v_1,[v_1,[v_1,[v_1,v_3]]]]+\tfrac{1}{210}\,[v_1,[v_1,[[v_1,\,v_2],v_2]]]\\
&\quad-\tfrac{1}{1260}\,[[v_1,[v_1,v_2]],[v_1,v_2]]+\tfrac{1}{2520}\,[v_1,[v_1,\,[v_1,[v_1,[v_1,v_2]]]]]
\end{aligned}
$$

De la même façon, on obtient l'inverse de la transformation de Dragt-Finn inverse $M_{g'}^{-1}=M_g$, où

$$
\begin{aligned}
g'_1 &= -g_1\\
g'_2 &= -g_2\\
g'_3 &= -g_3 + [g_1, v_2]\\
g'_4 &= -g_4 + [g_1, g_3] - \tfrac{1}{2}\,[g_1, [g_1, v_2]]\\
g'_5 &= -g_5 + [g_1, g_4] + [g_2, g_3] - \tfrac{1}{2}\,[g_1, [g_1, g_3]] + \tfrac{1}{2}\,[[g_1, g_2], g_2] + \tfrac{1}{6}\,[g_1, [g_1, [g_1, g_2]]]\\
g'_6 &= -g_6 + [g_1, g_5] + [g_2, g_4] - \tfrac{1}{2}\,[g_1, [g_1, g_4]] - \tfrac{1}{2}\,[g_1, [g_2, v_3]] + \tfrac{1}{2}\,[[g_1, g_3], g_2]\\
&\quad + \tfrac{1}{6}\,[g_1, [g_1, [g_1, g_3]]] - \tfrac{1}{4}\,[g_1, [[g_1, g_2], g_2]] - \tfrac{1}{24}\,[g_1, [g_1, [g_1, [g_1, g_2]]]]\\
g'_7 &= -g_7 + [g_1, g_6] + [g_2, g_5] + [g_3, g_4] - \tfrac{1}{2}\,[g_1, [g_1, g_5]] - [g_1, [v_2, g_4]] - \tfrac{1}{2}\,[g_2, [g_2, g_3]]\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,[[g_1, g_3], g_3] + \tfrac{1}{6}\,[g_1, [g_1, [g_1, g_4]]] - \tfrac{1}{2}\,[g_1, [[g_1, g_3], g_2]] + \tfrac{1}{2}\,[[g_1, g_2], [g_1, g_3]]\\
&\quad + \tfrac{1}{6}\,[[[g_1, v_2], g_2], g_2] - \tfrac{1}{24}\,[g_1, [g_1, [g_1, [g_1, g_3]]]] + \tfrac{1}{12}\,[g_1, [g_1, [[g_1, g_2], g_2]]]\\
&\quad + \tfrac{1}{6}\,[[g_1, [v_1, g_2]], [g_1, g_2]] + \tfrac{1}{120}\,[g_1, [g_1, [g_1, [g_1, [v_1, g_2]]]]]
\end{aligned}
$$

Sans aucun doute, ces formules auraient pu être obtenues en utilisant la bijection entre les mots de Lyndon et la base de Lyndon et en utilisant les formules développées des automorphismes de Lie en fonction des opérateurs de Lie. L'inconvénient aurait sans doute été la difficulté de composer des applications ce qui aurait nécessité la combinaison de plusieurs formules développées.

La forme plus que sympathique du morphisme injectif $L_a : x \mapsto [a, x]$ est l'équivalent de la forme triangulaire supérieure de la bijection entre les mots de Lyndon et la base de Lyndon, exprimée dans cette base. L'avantage, à mon sens réside dans le fait qu'on peut rester dans l'algèbre de lie libre, ce qui du point de vue de l'implantation est fort utile.

Ce morphisme possède les mêmes propriétés, indépendamment de la base choisie, mais il ne semble pas que sa représentation dans la base de Hall soit simple.

D'autre part, les relations entre les différentes représentations des éléments du groupe engendré par les exponentielles d'opérateur de Lie permettront par la suite de démontrer formellement l'équivalence de méthodes de perturbations ou encore l'équivalence de méthodes de recherche d'intégrateurs symplectiques. Les moyens de calculer explicitement ces relations fourniront des moyens de trouver explicitement des intégrateurs symplectiques.

J'avais tout d'abord proposé un algorithme pour la manipulation de polynômes de Lie dans la base de Hall (cf. [32]), sans m'être rendu compte que les mêmes considérations valaient pour la base de Lyndon et ce n'est que récemment, après la lecture de la thèse de M. Petitot, que j'ai pu effectivement le transposer. Les deux décompositions, dans la base de Hall et dans la base de Lyndon, seront implantées à partir de la même représentation des données dans la dernière partie de ce texte.

Chapitre II

Formalisme Hamiltonien

Dans ce chapitre, dissocié des méthodes de perturbations à proprement parler, sont exposés les définitions et concepts de bases de la mécanique hamiltonienne, utiles pour la suite du texte. Cette partie devrait, je l'espère, fournir les outils permettant de définir le cadre des méthodes de perturbations, lesquelles sont abordées surtout sous l'aspect du calcul.

Tout d'abord, on rappelle le formalisme hamiltonien. Toutes les notions abordées ici, ont été inspirées principalement de la lecture des deux livres d'Arnold ([2, 3]) et du livre de Meyer & Hall ([41]).

Ensuite, on s'intéresse aux familles de transformations canoniques et plus particulièrement à celles qui s'expriment en séries formelles du petit paramètre. Les idées, ici, m'ont été plutôt inspirées, d'une part, des articles originaux de Deprit [11] et de Dragt & Finn [14], d'autre part, d'articles généraux comme celui de Cary [7].

Enfin, nous comparons l'utilisation de la transformation de Deprit et de la transformation de Dragt-Finn en fonction du nombre d'évaluations de crochets de Poisson qu'elles requièrent à tout ordre.

8. Définitions et notations

Dans toute la suite on se place dans un espace de phases E de dimension $2n$ que l'on pourra éventuellement assimiler à $\mathbb{R}^{2n}$. Les variables d'état peuvent être représentées soit par le système dit coordonnées, moments

$$(q,p) = (q_1, \ldots, q_n,\ p_1, \ldots, p_n), \tag{8.1}$$

soit par

$$z = (q,p) = (z_1, \ldots, z_{2n}), \tag{8.2}$$

suivant la concision souhaitée dans les formules. Cet espace est naturellement muni de la forme bilinéaire antisymétrique J

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

où I_n désigne la matrice identité de taille n. La forme symplectique standard s'écrit

$$\omega = p_1 \wedge q_1 + \cdots + p_n \wedge q_n. \tag{8.4}$$

Une transformation linéaire T sur l'espace des phases est dite symplectique si elle préserve la forme symplectique ω ou encore si elle appartient au groupe symplectique

$$Sp(E, w) = \left\{ T; T^T J T = J \right\}. \tag{8.5}$$

On définit formellement un opérateur linéaire H comme étant hamiltonien s'il est la dérivée, à $t = 0$, d'une famille à un paramètre t de transformations symplectiques qui prend l'identité comme valeur, en $t = 0$. On obtient, alors, la condition pour H

$$H^T J + J H = 0. \tag{8.6}$$

H étant un opérateur hamiltonien on définit

$$h(x) = \tfrac{1}{2}\omega(x, Hx) \tag{8.7}$$

comme le Hamiltonien de H. Réciproquement, à toute forme quadratique h, on associe un opérateur hamiltonien H par

$$\omega(y, Hx) = h(x + y) - h(x) - h(y) \tag{8.8}$$

ce qui définit un isomorphisme entre les formes quadratiques et les opérateurs hamiltoniens.

Dans le formalisme matriciel, à toute matrice symétrique S, on associe un endomorphisme symplectique T par

$$T = e^{JS} = \sum_{m \geq 0} \frac{(JS)^m}{m!}. \tag{8.9}$$

D'autre part, tout opérateur hamiltonien H dont la matrice est

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

satisfait les conditions (8.6), c'est-à-dire

$$B^T = B, C^T = C, D^T = -A. \tag{8.11}$$

Le Hamiltonien correspondant est la forme quadratique h dont la matrice est la matrice symétrique

$$\frac{1}{2} J H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

On définit le crochet de Poisson de deux Hamiltoniens comme le Hamiltonien associé à l'opérateur hamiltonien, commutateur des deux opérateurs hamiltoniens correspondants. On obtient, alors, dans les coordonnées canoniques

$$\{h_1, h_2\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_1}{\partial p_i}\frac{\partial h_2}{\partial q_i} - \frac{\partial h_1}{\partial q_i}\frac{\partial h_2}{\partial p_i}. \tag{8.13}$$

De cette définition

$$L_{\{h_1,h_2\}} = [L_{h_1}, L_{h_2}], \tag{8.14}$$

on déduit que les opérateurs hamiltoniens forment une algèbre de Lie avec le commutateur comme crochet de Lie.

8.1. Transformations canoniques

Considérant la 2-forme $w = dp \wedge dq$, on définit le crochet de Poisson de deux fonctions lisses f et g comme

$$\{f, g\} = \omega(df, dg), \tag{8.15}$$

c'est-à-dire, dans les coordonnées de Darboux

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{8.16}$$

On peut exprimer de façon matricielle le crochet de Poisson de deux fonctions de l'espace des phases par

$$\{f, g\} = \sum_{1 \le k,l \le 2n} \frac{\partial f}{\partial z_k} J_{k,l} \frac{\partial g}{\partial z_l} = \nabla f^T J \nabla g \tag{8.17}$$

où

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{2n}}\right) \tag{8.18}$$

désigne le gradient de f.

On munit de cette façon l'espace des fonctions lisses sur E d'une structure d'algèbre de Lie par rapport au crochet de Poisson.

⋆⋆⋆

On note L_f ou $L(f)$, l'opérateur de Lie $g \mapsto \{f, g\}$. L'identité de Jacobi permet alors d'exprimer

$$[L_f, L_g] = L_{\{f,g\}}, \tag{8.19}$$

où $[A, B] = AB - BA$ désigne le commutateur de A et B. Cette dernière propriété permet alors de donner une structure d'algèbre de Lie aux opérateurs de Lie.

Par extension, on définit une transformation canonique sur l'espace des phases comme une transformation préservant le crochet de Poisson. On doit alors avoir, pour $Z = Tz$,

$$\{Z_i, Z_j\} = \{z_i, z_j\} = J_{i,j},\ 1 \le i, j \le 2n. \tag{8.20}$$

c'est-à-dire, pour tout $1 \le i, j \le 2n$

$$J_{i,j} = \{Z_i, Z_j\} = \sum_{1 \le k,l \le n} \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} J_{k,l} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l} = (M^T J M)_{i,j}, \tag{8.21}$$

où M désigne la matrice Jacobienne de la transformation T. En d'autres termes, les transformations canoniques sont celles dont le Jacobien appartient au groupe symplectique. La littérature emploie indifféremment l'adjectif canonique ou symplectique pour désigner de telles transformations.

On étend les transformations canoniques de l'espace des phases aux fonctions sur l'espace des phases en posant

$$Tf(z) = f(Tz). \tag{8.22}$$

Comme les transformations canoniques préservent les crochets de Poisson, on a pour une transformation canonique T et deux fonctions f et g (en notant $Z = Tz$),

$$\begin{aligned}
\{f, g\}_z &= \sum_{1 \le i,j \le 2n} \frac{\partial f}{\partial z_i} J_{i,j} \frac{\partial g}{\partial z_j} \\
&= \sum_{1 \le i,j \le 2n} \left[\sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial Z_k} \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} \right] J_{i,j} \left[\sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial g}{\partial Z_l} \frac{\partial Z_l}{\partial z_j} \right] \\
&= \sum_{1 \le k,l \le 2n} \frac{\partial f}{\partial Z_k} \left[\sum_{i,j} \frac{\partial Z_k}{\partial z_i} J_{i,j} \frac{\partial Z_l}{\partial z_j} \right] \frac{\partial g}{\partial Z_l} \\
&= \sum_{1 \le k,l \le 2n} \frac{\partial f}{\partial Z_k} J_{k,l} \frac{\partial g}{\partial Z_l} \\
&= \{f, g\}_Z.
\end{aligned} \tag{8.23}$$

ce qui signifie que le crochet de Poisson est inchangé, qu'il soit considéré comme fonction de Z ou de z. On a donc

$$\{f, g\}_z = \{f, g\}_Z \tag{8.24}$$

ce qui, par conséquent, implique pour toute transformation canonique T,

$$T\{f, g\} = \{Tf, Tg\} \quad \text{et} \quad L_{Tf} = T L_f T^{-1}. \tag{8.25}$$

9. Systèmes hamiltoniens

Les lois de Newton pour la mécanique classique produisent des systèmes d'équations différentielles d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^n$. Si les forces dérivent d'un potentiel, les équations du mouvement peuvent être ramenées au système hamiltonien, c'est-à-dire à l'étude d'un système d'équations différentielles d'ordre 1 dans un espace de dimension $2n$. Considérons un système matériel pour lequel les lois de Newton de la mécanique peuvent s'écrire

$$M\ddot{x} + \nabla F(x) = g(t) \tag{9.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, M est une matrice inversible symétrique $n \times n$, F est une fonction lisse à valeur réelle définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $g(t)$, une fonction lisse à valeur dans $\mathbb{R}^n$, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}$. En posant $p = M\dot{x}$, on a

$$\dot{x} = M^{-1}p, \quad \dot{p} = g(t) - \nabla F(x), \tag{9.2}$$

c'est-à-dire, en posant

$$h = \tfrac{1}{2} p^T M^{-1} p + F(x) - x^T g(t), \tag{9.3}$$

les équations de Newton se ramènent à un système d'ordre 1

$$\dot{x} = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{9.4}$$

h est appelé le Hamiltonien du système (9.1). En général, $T = \frac{1}{2}p^T M^{-1} p$ est l'énergie cinétique et $U = -F(x) + x^T g(t)$ est l'énergie potentielle. Si $g = 0$, le Hamiltonien est autonome et l'énergie totale $h = T + U$ est invariante.

⋆⋆⋆

Une autre approche consiste à considérer les équations de Lagrange de la mécanique. Soit $L(x, \dot{x}, t) = T - U$ le Lagrangien du système (9.1). le principe de moindre action de la mécanique affirme que l'évolution du système est définie par une courbe extrêmale de

$$\int L(x, \dot{x}, t) dt, \tag{9.5}$$

qui n'est atteinte, d'après les équations d'Euler, que si

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}. \tag{9.6}$$

Différentiant

$$h = \sum_{l=1}^{n} \dot{x}_l p_l - L(x, \dot{x}, t), \tag{9.7}$$

où p_l est une nouvelle variable que nous définirons par la suite, on obtient

$$dh = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_l} dx_l + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial p_l} dp_l + \frac{\partial h}{\partial t} dt \tag{9.8}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (p_l - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}) d\dot{x}_l + \sum_{l=1}^{n} \dot{x}_l dp_l - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_l} dx_l - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{9.9}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (p_l - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}) d\dot{x}_l + \sum_{l=1}^{n} \dot{x}_l dp_l - \sum_{l=1}^{n} \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}] dx_l - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{9.10}$$

L'équation précédente n'est satisfaite que si

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}, \quad \frac{\partial h}{\partial p_l} = \dot{x}_l, \quad \frac{\partial h}{\partial x_l} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}. \tag{9.11}$$

En posant $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l}$, $\quad q_l = x_l$, on obtient les équations de Hamilton

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial h}{\partial q_l}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial h}{\partial p_l}, \quad 1 \leq l \leq n. \tag{9.12}$$

⋆⋆⋆

Un système hamiltonien est la donnée d'un espace de phases et d'un Hamiltonien h. L'étude d'un système hamiltonien est l'étude du système d'équations différentielles

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial h}{\partial q_l}, \dot{q}_l = \frac{\partial h}{\partial p_l}, \quad 1 \leq l \leq n. \tag{9.13}$$

Un tel système peut encore s'écrire, en introduisant la forme alternée J (8.3) :

$$\dot{z} = J\nabla h = JDhz, \tag{9.14}$$

où Dh désigne la différentielle de h. En utilisant le crochet de Poisson, (9.14) s'écrit encore

$$\dot{z} = \{z, h\}. \tag{9.15}$$

Dans le cas d'un opérateur hamiltonien linéaire, puisque h est un polynôme homogène de degré 2, on a :

$$J\nabla h = H(z) = JDh(z) = J\tilde{H}(z) \tag{9.16}$$

où $\tilde{H}$ est la Hessienne de h :

$$\tilde{H} = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z_i \partial z_j}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}. \tag{9.17}$$

Dans l'espace des champs de vecteurs, on dira que Jdh est le champ hamiltonien du Hamiltonien h par analogie au système d'équations obtenu avec Jdh dans les coordonnées canoniques :

$$\dot{p}_l = -\frac{\partial h}{\partial q_l}, \dot{q}_l = \frac{\partial h}{\partial p_l}, \quad 1 \leq l \leq n. \tag{9.18}$$

Le Hamiltonien h peut éventuellement dépendre du temps, et, dans ce cas, on dira que le système est non-autonome.

9.1. Systèmes intégrables

L'intégrabilité d'un système hamiltonien est lié à l'obtention d'un certain nombre d'intégrales premières. On dit que F est une intégrale première du système hamiltonien donné par h si et seulement si on a :

$$\{F, h\} = 0. \tag{9.19}$$

D'après le théorème de Liouville (cf. [3]), on dit qu'un système hamiltonien est complètement intégrable, au sens de Liouville, si et seulement si il existe n intégrales premières indépendantes en involution, c'est-à-dire s'il existe $F_1, \ldots, F_n$ telles que

$$\{F_i, h\} = 0 \quad \text{et} \quad \{F_i, F_j\} = 0 \quad 1 \leq i, j, \leq n. \tag{9.20}$$

Par exemple,

— un système hamiltonien autonome à 1 degré de liberté est complètement intégrable puisque h est une intégrale première du système.

— un système linéaire hamiltonien est complètement intégrable.

Cependant, depuis les travaux de Poincaré, on sait que, en général, un système hamiltonien à plusieurs degrés de liberté n'est pas intégrable.

9.1.1. Exemples

L'étude d'un oscillateur harmonique est l'étude du système d'équations différentielles d'ordre 2 :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{9.21}$$

où $\omega > 0$ est une constante. Posant $p = \frac{\dot{x}}{\omega}$ et $q = x$, on obtient le système d'équations différentielles d'ordre 1 :

$$\dot{p} = \frac{\ddot{x}}{\omega} = -\omega x = -\omega q, \dot{q} = \dot{x} = \omega p, \tag{9.22}$$

c'est-à-dire, en posant $h = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$, on a

$$\dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}. \tag{9.23}$$

Le système ayant 1 degré de liberté, il est intégrable, ce que l'on constate avec

$$\frac{d}{dt}\left(p^2 + q^2\right) = 0.$$

Les solutions sont données par

$$(q, p) = e^{-tH}(q_0, p_0)$$

où

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

On a donc

$$e^{-tH} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{9.25}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcrcr} p & = & \cos(\omega t)p(0) & + & \sin(\omega t)q(0) \\ q & = & -\sin(\omega t)p(0) & + & \cos(\omega t)q(0) \end{array} \right. .$$

De la même façon, le Hamiltonien de n oscillateurs non-couplés s'écrit

$$h = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \omega_l (p_l^2 + q_l^2), \tag{9.26}$$

dont n intégrales premières sont les actions

$$I_l = \frac{1}{2}(p_l^2 + q_l^2), \quad 1 \leq l \leq n. \tag{9.27}$$

Les actions et leurs variables conjuguées (les angles) forment un jeu de variables canoniques définies par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_l & = & \sqrt{2I_l}\cos\phi_l \\ q_l & = & \sqrt{2I_l}\sin\phi_l \end{array} \right. , \quad \phi_l(t) = \phi_l(0) + \omega_l t, \quad 1 \leq l \leq n. \tag{9.28}$$

⋆⋆⋆

De façon générale, on a le théorème d'Arnold-Liouville [2] :

THÉORÈME 23 (Arnold). — *Si un système à n degrés de libertés est complètement intégrable, il existe n tores invariants pour le système hamiltonien, c'est-à-dire un changement de variables canonique en angle-actions. De plus, ce changement de variables peut s'effectuer par quadrature.*

9.2. Évolution au cours du temps

Dans le cas d'un système autonome, dans le formalisme des opérateurs de Lie, l'évolution au cours de temps du système est donné par

$$\dot{z} = \{z, h\} = -L_h z. \tag{9.29}$$

On a alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{d^n z}{dt^n} = (-1)^n L_h^n z. \tag{9.30}$$

La solution formelle $z(t)$ est donnée par sa série de Taylor

$$z(t) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{L_h^n}{n!} z(0) = e^{-tL_h} z(0). \tag{9.31}$$

La famille de transformations e^{-tL_h} est une famille de transformations canoniques à un paramètre, appelée également, application au temps t, du flot hamiltonien. Pour toute fonction lisse de l'espace des phases, on a le long des courbes solutions

$$\begin{aligned}
\dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial h}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, h\}.
\end{aligned} \tag{9.32}$$

Dans le cas général ([7]), lorsque h dépend éventuellement du temps, on définit, pour un système intégrable, l'application au temps t, comme l'application qui à un point de l'espace des phases z, associe le point $z(t)$, position au temps t de la solution du système hamiltonien, à la position z à $t = 0$. On note cette application $S_h(t)$.

On définit de façon similaire $S_h(t_1, t_2)$, l'application qui associe à z le point $z(t)$, position au temps $t = t_2$ de la solution du système hamiltonien à la position z en $t = t_1$.

⁂

Le théorème suivant nous fournit une première famille de transformations canoniques.

THÉORÈME 24. — $S_h(t_1, t)$, *est une famille de transformations canoniques.*

Dans le cas linéaire, c'est-à-dire lorsqu'on étudie le système hamiltonien

$$\dot{z} = H(z), \tag{9.33}$$

où H est un opérateur hamiltonien, $S_h(t_1, t)$ est une application linéaire et on a (cf. [41])

$$S_h(t_1, t_1) = Id \quad \text{et} \quad \dot{S}_h(t_1, t) = H S_h(t_1, t). \tag{9.34}$$

Posons alors $U(t) = S_h(t_1, t)^T J S_h(t_1, t)$. On a, d'après (8.6),

$$\dot{U}(t) = \dot{S}_h^T J S_h + S_h^T J \dot{S}_h = S_h^T (H^T J + JH) S_h = 0, \tag{9.35}$$

c'est-à-dire, pour tout t, $U(t) = U(0) = J$, et, par conséquent, l'opérateur linéaire S_h est une transformation symplectique.

Dans le cas général, notons $Z(t_1, t, z) = S_h(t_1, t)z$ la solution générale de (9.29). De

$$\frac{d}{dt} Z_i(t_1, t, z) = \{Z_i(t_1, t, z), h\} = J(Dh)Z_i(t_1, t, z), \tag{9.36}$$

on déduit, en différentiant, que

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \Xi(t_1, t_2, z) = J\tilde{H}\Xi(t_1, t_2, z), \tag{9.37}$$

où $\Xi(t_1, t_2, z)$ est la matrice jacobienne de $Z(t_1, t_2, z)$. De $Z(t_1, t_1, z) = z$, on déduit que $\Xi(t_1, t_1, z) = I$, puis que Ξ est la solution générale du système hamiltonien linéaire (9.37) et, par conséquent, est symplectique d'après (9.34). La transformation d'évolution au cours du temps est donc canonique d'après la définition (8.21).

⋆⋆⋆

Ces transformations d'évolution au cours du temps forment un groupe, puisqu'on a, pour tout t_1, t_2, t_3,

$$S_h(t_1, t_2)S_h(t_2, t_3) = S_h(t_1, t_3) \quad \text{et} \quad S_h^{-1}(t_1, t_2) = S_h(t_2, t_1).$$

$S_h(t_1, t_2)$ est dérivable et on a

$$\frac{\partial}{\partial t_1} S_h(t_1, t_2) = -S(t_1, t_2)L(h(t_1)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t_2} S_h(t_1, t_2) = L(h(t_2))S(t_1, t_2).$$

Si, par exemple, h ne dépend plus du temps, on a alors un groupe à un paramètre t, puisque $S_h(t_1, t_2) = S_h(0, t_2 - t_1)$. Dans ce cas

$$\frac{\partial S_h(t)}{\partial t} = -S_h(t)L_h = -L_h S_h(t), \tag{9.38}$$

et on retrouve l'égalité $S_h L_h S_h^{-1}(t) = L_h$, c'est-à-dire que $S_h h = h$.

⋆⋆⋆

Si on connaît la forme exacte de S_h, on peut alors résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, h\} = g. \tag{9.39}$$

Celle-ci se résout en notant que

$$\frac{\partial}{\partial t_1} S_h(t_1, t_2)f(t_1) = S_h(t_1, t_2)g(t_1),$$

ce qui donne

$$S_h(t_1, t_2)f(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} S_h(t, t_2)g(t)dt + S_h(t_0, t_2)f(t_0),$$

et, par conséquent,

$$f(t) = S_h(t_0, t)f(t_0) + \int_{t_0}^{t} S_h(t_1, t)g(t_1)dt_1. \tag{9.40}$$

10. Familles de transformations canoniques

Étant donnée $w'(p,q,\theta)$, une famille de fonctions de l'espace des phases de classe C^1, considérons le système hamiltonien donné par

$$\frac{\partial p_l}{\partial \theta} = -\frac{\partial w'}{\partial q_l}, \quad \frac{\partial q_l}{\partial \theta} = \frac{\partial w'}{\partial p_l}, \quad 1 \le l \le n. \tag{10.1}$$

T_θ, l'application au temps θ du flot hamiltonien de w', vérifie, pour tout z,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} T_\theta z &= -\{w'(T_\theta z), T_\theta z\} \\ &= -\{T_\theta w'(z), T_\theta z\} \\ &= -T_\theta L_{w'} z, \end{aligned} \tag{10.2}$$

qui est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} = -T_\theta L_{w'}. \tag{10.3}$$

Posons w, la primitive de w' relativement à θ, qui s'annule pour $\theta = 0$. Si $L_{w'}$ commute avec L_w, c'est-à-dire si $[L_w, L_{w'}] = L_{\{w,w'\}} = 0$, alors on a, pour tout $p \ge 0$,

$$\frac{\partial L_w^p}{\partial \theta} = p \frac{\partial L_w}{\partial \theta} L_w^{p-1} = p L_{w'} L_w^{p-1},$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial \theta} e^{-L_w} = -e^{-L_w} L_{w'} = -L_{w'} e^{-L_w}.$$

— Si $w' = w'_0$ ne dépend pas de θ, alors $[L_{w'}, L_{\theta w'}] = L_{\{w', \theta w'\}} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta}[\theta w'] = w'$ et donc la solution de (10.3) est

$$T_\theta = e^{-\theta L_{w'}} = e^{-L_w}.$$

— Si $w'(p,q,\theta) = a(\theta)\tilde{w}(p,q)$ alors, en posant $A(\theta) = \int_0^\theta a(\nu) d\nu$ la primitive de a qui s'annule en 0, on a $w = A(\theta)\tilde{w}$ et $[A\tilde{w}, a\tilde{w}] = Aa[\tilde{w}, \tilde{w}] = 0$. De la même façon, la solution de (10.3) est donnée par

$$T_\theta = e^{-\int_0^\theta a(\nu) d\nu \tilde{w}} \tag{10.4}$$

— Par contre, si $L_{w'}$ ne commute pas avec L_w, la solution n'est plus une exponentielle, mais ce qu'on appelle la transformée de Lie ou de Deprit par rapport à celle-ci. Néanmoins, l'exponentielle d'un opérateur de Lie est une transformation canonique (6.7). On peut également montrer (cf. [42]) que la solution de (10.3) est une exponentielle.

10.1. Forme générale des transformations

Intéressons-nous à présent aux transformations canoniques qui sont des séries formelles

$$T = \sum_{n \ge 0} \varepsilon^n T_n \quad \text{et} \quad T^{-1} = \sum_{n \ge 0} \varepsilon^n T_n^{-1}.$$

Le fait que T soit une transformation canonique impose des conditions sur les différents termes T_n. Le théorème suivant nous indique deux représentations possibles de ces transformations, ce qui légitime, d'une certaine façon, l'emploi, soit de la transformation de Dragt-Finn, soit de la transformation de Deprit.

Proposition 25. — *Étant donnée une transformation T, telle que Tz_i soit une série formelle pour tout $1 \leq i \leq 2n$:*

$$Tz_i = z_i + \sum_{j \geq 1} \varepsilon^j a_{i,j}(z) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j a_{i,j}(z), \tag{10.5}$$

où $a_{i,j}(z)$ est une fonction de $z = (z_1, \ldots, z_{2n})$,

- *il existe une série formelle $w = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n w_n$, telle que T^{-1} soit l'application au temps ε du flot Hamiltonien $\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$,*
- *il existe une série formelle $g = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n g_n$ telle que T^{-1} soit le produit infini des applications au temps 1 des flots hamiltoniens autonomes $\varepsilon^n g_n$.*

Remarque. — On peut considérer les applications au temps 1 des flots hamiltoniens autonomes $\varepsilon^n g_n$, comme des applications au temps ε^n des flots hamiltoniens autonomes g_n, ou comme les applications au temps ε des flots hamiltoniens non-autonomes $n\varepsilon^{n-1} g_n$.

La preuve de cette propriété se trouve, sous une forme analogue, dans [14], mais il existe des résultats plus généraux sur la forme des transformations canoniques dépendant continûment d'un paramètre. La démonstration ne repose que sur des considérations algébriques sur le crochet de Poisson et en particulier sur le lemme suivant, qui exprime que toute dérivation est une dérivation intérieure. La même démonstration peut s'appliquer pour démontrer la proposition 17, page 20.

Lemme 26 (Dragt-Finn [14]). — *Soient $(z_1, \cdots, z_{2n})$ des coordonnées canoniques et un ensemble de $2n$ fonctions $f_1, \ldots, f_{2n}$. Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

(i) pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$, on a $\{z_i, f_j\} = \{z_j, f_i\}$,

(ii) il existe g telle que pour tout $1 \leq i \leq 2n$, on ait $f_i = \{z_i, g\}$.

Démonstration. — Si on a pour $1 \leq i \leq 2n$, $f_i = \{z_i, g\}$, alors on déduit

$$\{z_i, f_j\} = \{z_i, \{z_j, g\}\} = -\{z_j, \{g, z_i\}\} - \{g, \{z_i, z_j\}\} = \{z_j, \{z_i, g\}\} = \{z_j, f_i\}$$

c'est-à-dire (i) en utilisant l'identité de Jacobi et le fait que $\{z_i, z_j\}$ est une constante.

Réciproquement, supposons que l'on ait (i). Posons $z^* = Jz$, on a alors

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial z_j} = J_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq 2n. \tag{10.6}$$

Pour tout f on déduit alors que

$$\{z_i, f\} = \sum_{1 \leq j,k \leq 2n} \frac{\partial z_i}{\partial z_j} J_{j,k} \frac{\partial f}{\partial z_k} = \sum_{1 \leq k \leq 2n} J_{i,k} \frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{\partial f}{\partial z_i^*}, \tag{10.7}$$

ce qui fait qu'on a, pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$,

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_i^*} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j^*}.$$

On en déduit alors que $\sum f_i dz_i^*$ est une forme exacte et que $g = -\int \sum f_i dz_i^*$ est bien définie et vérifie, pour tout $1 \leq i \leq 2n$, $\{z_i, g\} = f_i$.

⋆⋆⋆

Pour montrer la proposition 25, on construit les g_k terme à terme. Montrons le résultat suivant :

LEMME 27 (Dragt-Finn [14]). — *Il existe $g_1, \ldots, g_p, \ldots$ tels que pour tout $p \geq 1$, on ait*

$$e^{\varepsilon^p L_{g_p}} \cdots e^{\varepsilon L_{g_1}} T z_i = z_i + \sum_{j>p} \varepsilon^j a_{i,j}^{(p)}, \quad 1 \leq i \leq 2n. \tag{10.8}$$

• Si $p = 1$, T est une transformation canonique. Si on développe $\{z_i, z_j\} = \{Tz_i, Tz_j\}$ par rapport à ε, on obtient

$$0 = \varepsilon\left(\{z_i, a_{j,1}(z)\} + \{a_{i,1}(z), z_j\}\right) + \sum_{n\geq 2} \varepsilon^n \sum_{p+q=n} \{a_{i,p}(z), a_{j,q}(z)\}, \tag{10.9}$$

et, en identifiant terme à terme les coefficients de la série,

$$\{z_i, a_{j,1}(z)\} + \{a_{i,1}(z), z_j\} = 0.$$

D'après le lemme 26, il existe g_1 tel que pour tout $1 \leq i \leq 2n$ on ait

$$a_{i,1} = \{z_i, g_1\} = -L_{g_1} z_i. \tag{10.10}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon L_{g_1}} T z_i &= e^{\varepsilon L_{g_1}} (z_i + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n a_{i,n}(z)) \\ &= z_i + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n \sum_{p+q=n} \frac{L_{g_1}^p}{p!} a_{i,q}(z) \\ &= z_i + \varepsilon L_{g_1} z_i + a_{i,1}(z) + \sum_{n\geq 2} \varepsilon^n \sum_{p+q=n} \frac{L_{g_1}^p}{p!} a_{i,q}(z) \\ &= z_i + \sum_{n\geq 2} \varepsilon^n a_{i,n}^{(1)}(z). \end{aligned} \tag{10.11}$$

• Supposons la propriété (10.8) vérifiée au rang $k-1$. Comme $e^{\varepsilon^p L_{g_p}}$ est une transformation canonique, pour tout $1 \leq p \leq k-1$, on déduit que $e^{\varepsilon^{k-1} L_{g_{k-1}}} \cdots e^{\varepsilon L_{g_1}} T$ est une transformation canonique et par conséquent pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$, on a

$$\{z_i + \sum_{m\geq k} \varepsilon^m a_{i,m}^{(k-1)}(z), z_j + \sum_{m\geq k} \varepsilon^m a_{j,m}^{(k-1)}(z)\} = \{z_i, z_j\}.$$

De la même manière, on déduit que

$$0 = \left(\{z_i, a_{j,k}^{(k-1)}(z)\} + \{a_{i,k}^{(k-1)}(z), z_j\}\right) + \sum_{m\geq k+1} \varepsilon^m \sum_{kp+q=m} \{a_{i,p}^{(k-1)}(z), a_{j,q}^{(k-1)}(z)\},$$

ce qui, en identifiant les termes de degré k, donne

$$\{z_i, a_{j,k}^{(k-1)}(z)\} + \{a_{i,k}^{(k-1)}(z), z_j\} = 0$$

et prouve l'existence de g_k, tel que, pour tout $1 \leq i \leq 2n$, on ait

$$a_{i,k}^{(k-1)} = \{z_i, g_k\} = -L_{g_k} z_i.$$

De la même façon, on déduit que

$$\begin{aligned}
e^{\varepsilon^k L_{g_k}} \cdots e^{\varepsilon L_{g_1}} T_{z_i} &= e^{\varepsilon^k L_{g_k}} \cdots e^{\varepsilon L_{g_1}} (z_i + \sum_{m \geq k} \varepsilon^m a_{i,m}^{(k-1)}(z)) \\
&= z_i + \sum_{m \geq k} \varepsilon^m \sum_{kp+q=m} \frac{L_{g_k}^p}{p!} a_{i,q}^{(k-1)}(z) \\
&= z_i + \varepsilon^k \left(L_{g_k} z_i + a_{i,k}^{(k-1)}(z) \right) + \sum_{m \geq k+1} \varepsilon^m \sum_{kp+q=m} \frac{L_{g_k}^p}{p!} a_{i,q}^{(k-1)}(z) \\
&= z_i + \sum_{m \geq k+1} \varepsilon^m a_{i,m}^{(k)}(z). \qquad (10.12)
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Pour démontrer la deuxième partie de la proposition 25, on utilise le lemme suivant :

Lemme 28 (Dragt-Finn [14]). — *Si T est une transformation canonique, il existe une fonction $h(Tz, \varepsilon)$ telle que*

$$\frac{\partial Tz}{\partial \varepsilon} = -\{h(Tz, \varepsilon), Tz\}.$$

Démonstration. — De $\{Tz_i, Tz_j\} = \{z_i, z_j\}$, on déduit que, pour tout $1 \leq i, j \leq 2n$,

$$\sum_{p,q \geq 0} \varepsilon^p \varepsilon^q \{a_{i,p}(z), a_{j,q}(z)\} = \{z_i, z_j\}. \qquad (10.13)$$

En dérivant par rapport à ε l'équation précédente, on a

$$\sum_{p,q \geq 0} \varepsilon^p \varepsilon^{q-1} \{a_{i,p}(z), q a_{j,q}(z)\} + \varepsilon^{p-1} \varepsilon^q \{p a_{i,p}(z), a_{j,q}(z)\} = 0 \qquad (10.14)$$

et donc

$$\{\sum_{p \geq 0} \varepsilon^p a_{i,p}(z), \sum_{q \geq 0} q \varepsilon^{q-1} a_{i,q}(z)\} + \{\sum_{p \geq 0} p \varepsilon^{p-1} a_{i,p}(z), \sum_{q \geq 0} \varepsilon^q a_{i,q}(z)\} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\{Tz_i, \frac{\partial Tz_j}{\partial \varepsilon}\} = \{Tz_j, \frac{\partial Tz_i}{\partial \varepsilon}\},$$

le crochet de Poisson étant pris en z. T étant canonique, on a, d'après (8.24),

$$\{Tz_i, \frac{\partial Tz_j}{\partial \varepsilon}\}_z = \{Tz_i, \frac{\partial Tz_j}{\partial \varepsilon}\}_{Tz},$$

et comme les Tz_i sont des coordonnées canoniques, il existe, d'après le lemme 28, une fonction $h(Tz, \varepsilon)$ vérifiant, pour tout $1 \leq i \leq 2n$,

$$\frac{\partial Tz_i}{\partial \varepsilon} = -\{h(Tz, \varepsilon), Tz_i\} = -T\{h(z, \varepsilon), z_i\} = -TL_h z_i. \qquad (10.15)$$

On a alors

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = -T L_h. \tag{10.16}$$

Posons $h = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$, pour garder la cohérence avec ce qui a précédé et pour obtenir, ensuite, des formules plus concises. En particulier si $w = \varepsilon^n w_n$, on retrouve l'exponentielle d'un opérateur de Lie.

L'existence de w est subordonnée à l'égalité

$$\{T z_i, \frac{\partial T z_j}{\partial \varepsilon}\} = \{T z_j, \frac{\partial T z_i}{\partial \varepsilon}\}, \tag{10.17}$$

qui est vérifiée, par exemple, si T est de classe C^2, ou vérifie pour tout $1 \leq i, j < 2n$

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial z_j \partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \varepsilon \partial z_j}. \tag{10.18}$$

10.2. Transformation de Deprit

La transformation de Lie, de type T_f, est encore appelée transformation de Deprit. Elle a été introduite par Deprit [11]. Étant donnée une série génératrice

$$w = \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n w_n, \tag{10.19}$$

on s'intéresse à l'application, au temps ε, du flot hamiltonien non-autonome donné par la fonction hamiltonienne $\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$. Notons T_w cette famille à un paramètre, on a,

$$T_w(0) = I, \quad \frac{\partial T_w}{\partial \varepsilon} = -T_w L_{\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}}. \tag{10.20}$$

De (10.20), on déduit que T_w^{-1} vérifie l'équation différentielle

$$T_w^{-1}(0) = I, \quad \frac{\partial T_w^{-1}}{\partial \varepsilon} = L_{\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}} T_w^{-1}. \tag{10.21}$$

La solution se développe en série du petit paramètre ε et on obtient par récurrence

$$T_w = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n (T_n)_n, \quad T_w^{-1} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n (T_w^{-1})_n, \tag{10.22}$$

avec

$$(T_w)_0 = I, \quad (T_w)_n = -\sum_{p=1}^{n} \tfrac{p}{n} (T_w)_{n-p} L_{w_p}, \tag{10.23}$$

$$(T_w^{-1})_0 = I, \quad (T_w^{-1}) = \sum_{p=1}^{n} \tfrac{p}{n} L_{w_p} (T_w^{-1})_{n-p}. \tag{10.24}$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera T_n pour $(T_w)_n$ et T_n^{-1} pour $(T_w^{-1})_n$.

Remarque. — La transformation, que je me permets d'appeler transformation de Deprit, n'est pas, à proprement parler, la transformation de Deprit. Dans [11], elle désigne plutôt l'application du flot hamiltonien de w (au lieu de $\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$). J'ai utilisé l'autre notation par souci de concision dans les formules et également, parce que cette formulation est utilisée, en particulier pour fournir des estimations (cf. [22, 25, 52, 24]).

La transformation de Deprit, tout comme son inverse, est une transformation canonique, puisqu'elle est l'application, au temps ε, d'un flot hamiltonien et qu'un calcul direct montre qu'elle est linéaire, qu'elle conserve le produit et le crochet de Poisson (cf. [11, 22] ou (6.30) page 16).

Le terme général T_n se développe en

$$T_n = \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} (-1)^j \tfrac{k_1}{k_1} \tfrac{k_2}{k_1+k_2} \cdots \tfrac{k_j}{k_1+\cdots+k_j} L_{w_{k_1}} \cdots L_{w_{k_j}}, \tag{10.25}$$

et T_n^{-1} en

$$T_n^{-1} = \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \tfrac{k_1}{k_1} \tfrac{k_2}{k_1+k_2} \cdots \tfrac{k_j}{k_1+\cdots+k_j} L_{w_{k_1}} \cdots L_{w_{k_j}}. \tag{10.26}$$

Les sommes précédentes sont les sommes sur tous les j-uplets possibles d'entiers strictement positifs dont la somme vaut n. Le nombre t_n de termes dans (10.25) ou (10.26) est le nombre de suites croissantes de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire que

$$t_n = 2^{n-1}. \tag{10.27}$$

Pour $f = \sum_{p\geq 0} \varepsilon^p f_p$ on a, pour les premiers termes de $F = \sum_{p\geq 0} \varepsilon^p F_p = T_w^{-1} f$,

$$\begin{aligned}
F_0 &= f_0\\
F_1 &= f_1 - \{f_0,\, w_1\}\\
F_2 &= f_2 - \{f_0,\, w_2\} - \{f_1,\, w_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0,\, w_1\},\, w_1\}\\
F_3 &= f_3 - \{f_0,\, w_3\} - \{f_1,\, w_2\} - \{f_2,\, w_1\} + \tfrac{2}{3}\,\{f_0,\, \{w_1,\, w_2\}\} + \{\{f_0,\, w_2\},\, w_1\}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_1,\, w_1\},\, w_1\} - \tfrac{1}{6}\,\{\{\{f_0,\, w_1\},\, w_1\},\, w_1\}\\
F_4 &= f_4 - \{f_0,\, w_4\} - \{f_1,\, w_3\} - \{f_2,\, w_2\} - \{f_3,\, w_1\} + \tfrac{3}{4}\,\{f_0,\, \{w_1,\, w_3\}\}\\
&\quad + \tfrac{2}{3}\,\{f_1,\, \{w_1,\, w_2\}\} + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0,\, w_2\},\, w_2\} + \{\{f_0,\, w_3\},\, w_1\} + \{\{f_1,\, w_2\},\, w_1\}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_2,\, w_1\},\, w_1\} - \tfrac{1}{4}\,\{f_0,\, \{w_1,\, \{w_1,\, w_2\}\}\} - \tfrac{2}{3}\,\{\{f_0,\, \{w_1,\, w_2\}\},\, w_1\}\\
&\quad - \tfrac{1}{2}\,\{\{\{f_0,\, w_2\},\, w_1\},\, w_1\} - \tfrac{1}{6}\,\{\{\{f_1,\, w_1\},\, w_1\},\, w_1\}\\
&\quad + \tfrac{1}{24}\,\{\{\{\{f_0,\, w_1\},\, w_1\},\, w_1\},\, w_1\}.
\end{aligned}$$

10.3. Exponentielle

Etant donnée une série

$$k = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n k_n$$

on considère $T_{k(\varepsilon)}$, l'application au temps ε du flot associé au système hamiltonien autonome

$$\varepsilon \frac{dz}{d\tau} = \{z, k\}. \tag{10.28}$$

On a donc $\varepsilon\dfrac{\partial T_{k(\varepsilon)}}{\partial\tau} = -T_{k(\varepsilon)}L_k$ et, par conséquent, $T_{k(\varepsilon)} = e^{-L_k}$, $\quad T^{-1}_{k(\varepsilon)} = e^{L_k}$. Le terme général T_n^{-1} de $T^{-1}_{k(\varepsilon)}$ se développe en

$$T_n^{-1} = \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \frac{L_{k_1}\cdots L_{k_j}}{j!}. \tag{10.29}$$

Le nombre d'éléments dans (10.29) est le nombre de suites croissantes de $\{1,\ldots,n-1\}$, c'est-à-dire, 2^{n-1}. Pour $f = \sum_{p\geq 0}\varepsilon^p f_p$, les premiers termes de $F = \sum_{p\geq 0}\varepsilon^p F_p = e^{L_k}f$ sont

$$F_0 = f_0$$

$$F_1 = f_1 - \{f_0,\, k_1\}$$

$$F_2 = f_2 - \{f_0,\, k_2\} - \{f_1,\, k_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0,\, k_1\},\, k_1\}$$

$$\begin{aligned}F_3 = {}& f_3 - \{f_0,\, k_3\} - \{f_1,\, k_2\} - \{f_2,\, k_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{f_0,\, \{k_1,\, k_2\}\} + \{\{f_0,\, k_2\},\, k_1\}\\ &+ \tfrac{1}{2}\,\{\{f_1,\, k_1\},\, k_1\} - \tfrac{1}{6}\,\{\{\{f_0,\, k_1\},\, k_1\},\, k_1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_4 = {}& f_4 - \{f_0,\, k_4\} - \{f_1,\, k_3\} - \{f_2,\, k_2\} - \{f_3,\, k_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{f_0,\, \{k_1,\, k_3\}\} + \tfrac{1}{2}\,\{f_1,\, \{k_1,\, k_2\}\}\\ &+ \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0,\, k_2\},\, k_2\} + \{\{f_0,\, k_3\},\, k_1\} + \{\{f_1,\, k_2\},\, k_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_2,\, k_1\},\, k_1\}\\ &- \tfrac{1}{6}\,\{f_0,\, \{k_1,\, \{k_1,\, k_2\}\}\} - \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0,\, \{k_1,\, k_2\}\},\, k_1\} - \tfrac{1}{2}\,\{\{\{f_0,\, k_2\},\, k_1\},\, k_1\}\\ &- \tfrac{1}{6}\,\{\{\{f_1,\, k_1\},\, k_1\},\, k_1\} + \tfrac{1}{24}\,\{\{\{\{f_0,\, k_1\},\, k_1\},\, k_1\},\, k_1\}.\end{aligned}$$

10.4. Transformation de Dragt-Finn

Considérons le produit infini d'applications, au temps ε^n, de flots hamiltoniens autonomes g_n. La transformation de Dragt-Finn, comme son inverse, sont des produits infinis

$$M_g = e^{-\varepsilon L_{g_1}}\cdots e^{-\varepsilon^n L_{g_n}}\cdots, \quad M_g^{-1} = \cdots e^{\varepsilon^n L_{g_n}}\cdots e^{\varepsilon L_{g_1}}. \tag{10.30}$$

La transformée de Dragt-Finn est un produit infini de transformations de Deprit, ce qui fait qu'elle est naturellement une transformation canonique.

Remarque. — Il semble, que l'idée de cette transformation revienne à Kamel, au début des années 70. Cependant, le nom de Dragt-Finn reste attaché à celle-ci.

On peut développer M_g et M_g^{-1} en fonction du petit paramètre ε :

$$M_g = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n M_n, \quad M_g^{-1} = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n M_n^{-1}, \tag{10.31}$$

avec la forme générale

$$M_0^{-1} = I, \quad M_n^{-1} = \sum_{\wp(1,n;n)} \frac{L_{g_n}^{m_n}\cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_n!\cdots m_1!}. \tag{10.32}$$

Ici $\wp(1,n;n)$ est l'ensemble des partitions de n défini en (6.39), c'est-à-dire

$$\wp(1,n;n) = \{(m_1,\ldots,m_n),\, m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n\}.$$

On sait (cf. Andrews [1]) que le nombre p_n de partitions de n est équivalent, lorsque n tend vers l'infini, à

$$\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4n\sqrt{3}}, \tag{10.33}$$

c'est-à-dire qu'il y nettement moins de termes dans (10.32) que dans les autres développements correspondants aux autres transformations.

Pour $f = \sum_{p\geq 0} \varepsilon^p f_p$, les premiers termes de $F = \sum_{p\geq 0} \varepsilon^p F_p = M_g^{-1} f$ sont

$$\begin{aligned}
F_0 &= f_0 \\
F_1 &= f_1 - \{f_0, g_1\} \\
F_2 &= f_2 - \{f_0, g_2\} - \{f_1, g_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0, g_1\}, g_1\} \\
F_3 &= f_3 - \{f_0, g_3\} - \{f_1, g_2\} - \{f_2, g_1\} + \{f_0, \{g_1, g_2\}\} + \{\{f_0, g_2\}, g_1\} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_1, g_1\}, g_1\} - \tfrac{1}{6}\,\{\{\{f_0, g_1\}, g_1\}, g_1\} \\
F_4 &= f_4 - \{f_0, g_4\} - \{f_1, g_3\} - \{f_2, g_2\} - \{f_3, g_1\} + \{f_0, \{g_1, g_3\}\} + \{f_1, \{g_1, g_2\}\} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_0, g_2\}, g_2\} + \{\{f_0, g_3\}, g_1\} + \{\{f_1, g_2\}, g_1\} + \tfrac{1}{2}\,\{\{f_2, g_1\}, g_1\} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\,\{f_0, \{g_1, \{g_1, g_2\}\}\} - \{\{f_0, \{g_1, g_2\}\}, g_1\} - \tfrac{1}{2}\,\{\{\{f_0, g_2\}, g_1\}, g_1\} \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\,\{\{\{f_1, g_1\}, g_1\}, g_1\} + \tfrac{1}{24}\,\{\{\{\{f_0, g_1\}, g_1\}, g_1\}, g_1\}.
\end{aligned}$$

11. Calcul de la transformée inverse

Le calcul des transformées inverses peut se faire par évaluation des formules de développement des transformations. Mais le nombre de monômes étant très important, on calcule directement les transformées.

Pour calculer la transformée inverse par la transformation de Deprit, on utilise l'algorithme proposé par Henrard [29], qui tient compte des relations récurrentes entre les T_p^{-1}, et qui est d'ailleurs plus commode, du point de vue du calcul, que l'algorithme proposé par Deprit. Cet algorithme est souvent utilisé pour effectuer les estimations sur les rayons de convergence, comme, par exemple, dans les travaux de Giorgilli, Galgani ou Simò [25, 22, 8].

Pour la transformation de Dragt-Finn, comme on ne connaît *a priori* aucune formule close entre les M_p^{-1}, on utilise le fait que la transformation est un produit infini d'exponentielles de termes homogènes.

Étant donné une série formelle $f = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n f_n$, on note F la transformée inverse de f :

$$F = T^{-1} f = \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n F_n. \tag{11.1}$$

11.1. Transformation de Deprit

À partir de $F_n = \sum_{k=0}^{p} T_p^{-1} f_{n-p}$ et des relations $T_p^{-1} f_q = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{p} L_{w_k} T_{p-k}^{-1} f_q$, issues de (10.24), on construit successivement $F_{p,q} = T_p^{-1} f_q$ pour $p + q \leq r$. On doit alors remplir un tableau

$$
\begin{array}{cccccccc}
f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_i & \cdots & \cdots & f_n \\
 & F_{1,0} & F_{1,1} & F_{1,2} & & \ddots & \vdots & F_{1,n-1} \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
 & & & & F_{i,0} & F_{i,1} & \cdots & F_{i,n-i} \\
 & & & & & \ddots & & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \cdots & F_{n,0} \\
F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_i & \cdots & & F_n
\end{array}
\tag{11.2}
$$

colonne par colonne. Chaque terme $F(j, i-j)$ se déduit des précédents $F(k, i-j)$ qui sont dans la même diagonale, lesquelles sont indépendantes entre-elles. En particulier si $f_i = F(i, 0) = 0$, alors on a $F(k, i) = 0$ pour tout k. Chaque terme F_i s'obtient comme la somme des éléments de la colonne $F(j, i-j)$.

Avec les valeurs initiales $F_0 = f_0, \ldots, F_r = f_r$, on utilise la boucle :

pour $i := 1$ **à** r **faire**
  pour $j := 1$ **à** i **faire**
    pour $k := 1$ **à** j **faire** $F_{j,i-j} := F_{j,i-j} + \frac{k}{j}\{w_k, F_{j-k,i-j}\}$;
    $F_i := F_i + F_{j,i-j}$.

Dans l'algorithme précédent, on évalue un crochet de Poisson d'un terme d'ordre ε^p et d'un terme d'ordre ε^q lorsque $k = p$ et $j - k + i - j = q$, ou, de façon équivalente, lorsque $k = p$ et $i = p + q$. Le nombre de tels crochets de Poisson est le nombre d'éléments de $\{j; p \leq j \leq p+q\}$, c'est-à-dire, $q + 1$.

Le nombre de crochets de Poisson calculés est une bonne indication du coût mais il faut également tenir compte du nombre de termes gardés en mémoire durant le calcul. Dans l'algorithme proposé pour la transformation de Deprit, il est nécessaire de garder en mémoire tous les termes $F_{p,q}$, pour $p + q \leq r$, pour pouvoir calculer $F_0, \ldots, F_r$. De plus, il est très intéressant de les garder, au cas où on aurait à calculer F_{r+1}.

La transformation de Deprit inverse nécessite donc l'évaluation de $q + 1$ crochets de Poisson faisant intervenir des termes d'ordre p et q, et de garder en mémoire $k + 1$ termes d'ordre k.

Remarque. — En fait, mais ça ne change rien au nombre d'évaluations nécessaires, il est peut-être plus intéressant de calculer les éléments du tableau, diagonale par diagonale. Chaque diagonale représente un $T^{-1} f_i$. Cette technique permet de ne stocker en mémoire qu'une diagonale, somme des diagonales précédentes. Néanmoins si on veut calculer F_{r+1}, on doit alors re-calculer tout le tableau.

11.2. Transformation de Dragt-Finn

Comme il n'y a pas, *a priori*, de formule close entre les différents M_n^{-1}, le calcul de $\sum_{m=0}^{n} M_{n-m}^{-1} f_m$ devrait coûter l'évaluation de $\sum_{i \leq n} p(i)$ monômes de Lie, ce qui est quand même nettement inférieur à 2^n. Mais le fait que $\bar{M}^{-1}$ soit un produit d'exponentielles de termes homogènes nous incite à utiliser un autre algorithme.

Étant donnée une fonction $f = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n f_n$, on va construire une suite auxiliaire de séries,

$$F_0 = f, F^k = e^{\varepsilon^k L_{g_k}} F^{k-1}.$$

On a alors

$$F_n^k = \sum_{jk+p=n} \tfrac{1}{j!} L_{g_k}^j F_p^{k-1}, \tag{11.3}$$

et par conséquent $F_n = F_n^n$. Étant donné $F_{|r}^{k-1} = \sum_{p=0}^r \varepsilon^p F_p^{k-1}$, on construit successivement $F_{|r}^{k,0} = F_{|r}^{k-1}$, $F_{|r}^{k,i} = \frac{1}{i} L_{g_k} F_{|r}^{k,i-1}$ tant que $i \leq [\frac{r}{k}] = \max\{n \in N; n \leq \frac{r}{k}\}$. On obtient alors $F_{|r}^k$ comme $\sum_{ki\leq r} F_{|r}^{k,i}$.

On construit alors la tableau

$$\begin{array}{cccccccc}
f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_i & \cdots & \cdots & f_r \\
 & F_1^1 & F_2^1 & F_3^1 & & \ddots & \vdots & F_r^1 \\
 & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\
 & & & & F_i^i & F_{i+1}^i & \cdots & F_r^i \\
 & & & & & \ddots & & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \cdots & F_r^r \\
F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_i & \cdots & & F_r
\end{array} \tag{11.4}$$

avec l'algorithme :

pour $i := 1$ **à** r **faire**
  pour $k := i$ **à** r **faire**
    pour $j := 1$ **à** $[\frac{k}{i}]$ **faire** $F_{i+j-1,k} := \frac{1}{j}\{g_i, F_{i+j-2,k-i}\}$;
  pour $k := i$ **à** r **faire**
    pour $j := 2$ **à** $[\frac{k}{i}]$ **faire** $F_{i,k} := F_{i,k} + F_{i+j-1,k}$;
    $F_{i,k} = F_{i,k} + F_{i-1,k}$.

Le tableau est rempli ligne par ligne et c'est la principale différence avec l'algorithme pour la transformation de Deprit. On stocke temporairement les $F_k^{i,j}$ dans le même tableau à la $(i+j-1)^{\text{ième}}$ ligne.

Un crochet de Poisson entre un terme d'ordre ε^p et un terme d'ordre ε^q est obtenu lorsque $i = p$ et $k - i = q$, ainsi le nombre de tels crochets de Poisson vaut $[\frac{p+q}{p}]$.

D'autre part, l'algorithme utilise un tableau qui est partiellement effacé à chaque boucle. Ce tableau est rempli par les $F_p^{i,j}$ pour $ij \leq p \leq r$. Pendant le calcul des F^i, il est rempli, d'une part, par les $F^{i'}$ pour $0 \leq i' \leq i$, ce qui fait $\inf(i, k+1)$ termes d'ordre k donné, d'autre part, par les $F^{i,j}$ ce qui donne également $[\frac{k}{i}]$ termes d'ordre k. On a donc simultanément $\inf(i,k+1) + [\frac{k}{i}]$ termes d'ordre k dans le tableau à la fin de la $i^{\text{ème}}$ boucle. Si $i \geq k$ alors $\inf(i,k+1) + [\frac{k}{i}] = k+1$, sinon $\inf(i,k+1) + [\frac{k}{i}] = i + [\frac{k}{i}] \leq i + \frac{k}{i} \leq k+1$ de telle façon que le tableau contient au plus $k+1$ termes d'ordre k.

11.3. Coût des algorithmes

De $[\frac{p+q}{p}] \leq \frac{p+q}{p} \leq q+1$, on déduit que le calcul de la transformée de Dragt-Finn inverse coûte moins en évaluations de crochets de Poisson de termes d'ordre p et q que la transformée inverse de Deprit. Le nombre total de crochets de Poisson nécessaires pour calculer $F_0, \ldots, F_r$ par la transformation de Deprit inverse est

$$t'_r = \sum_{1 \leq p+q \leq r} q+1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{q=0}^{i-1} q+1 = \sum_{i=1}^{r} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{r(r+1)(r+2)}{6} = \frac{r^3}{6} + O(r^2). \quad (11.5)$$

Pour la transformation de Dragt-Finn, on trouve

$$m'_r = \sum_{1 \leq p+q \leq r} [\tfrac{p+q}{p}] = \sum_{i=1}^{r} \sum_{p=1}^{i} (\tfrac{i}{p} + O(1)) = \sum_{i=1}^{r} (i \log i + O(i)) = \tfrac{1}{2} r^2 \log r + O(r^2). \quad (11.6)$$

Récapitulons dans un tableau pour des ordres de perturbation donnés, le nombre de produits d'opérateurs de Lie dans $\sum_{k \leq r} T_k^{-1}$ (resp. $\sum_{k \leq r} M_k^{-1}$) et le nombre de crochets de Poisson évalués lors du calcul de $F_{|r} = T^{-1} f$ (resp. M^{-1}) avec les algorithmes précédents.

Coût des transformations

Ordre	Opérateurs de Lie		Crochets de Poisson évalués	
	$\sum_{k<r} M_k^{-1}$	$\sum_{k<r} T_k^{-1}$	$F_{\vert r} = M^{-1} f$	$F_{\vert r} = T^{-1} f$
1	1	1	1	1
2	3	3	4	4
3	6	7	9	10
4	11	15	17	20
5	18	31	27	35
6	29	63	41	56
7	44	127	57	84
8	66	255	77	120
9	96	511	100	165
10	138	1023	127	220
15	683	32767	314	680
20	2713	1048575	600	1540
30	28628	1073741823	1492	4960

Tableau 1

°°°

La transformée de Dragt-Finn utilise moins de crochets de Poisson que la transformée de Deprit. Par ailleurs, la transformation de Deprit et la transformation de Dragt-Finn nécessitent de stocker $k+1$ termes d'ordre k (ce peuvent être des polynômes de degré k ou $k+2$). La différence apparaît à partir de l'ordre 3 et est flagrante à partir de l'ordre 10. Cet ordre peut paraître élevé, mais, lors du calcul des formes normales pour la lune (cf. Henrard [29]) ou pour l'étude de la stabilité du point $\mathcal{L}_4$, le calcul est poussé au moins à l'ordre 30 (cf. Simò [52], Giorgilli *et al.* [25], Galgani & Giorgilli [8]).

Il serait sans doute très intéressant de chercher, pour chacune des deux transformations, le nombre minimal d'évaluations de crochets de Lie, nécessaires pour calculer les diverses transformées. Ceci pourrait peut-être s'effectuer à partir de techniques de réécriture, en utilisant une représentation distribuée des polynômes de Lie.

Chapitre III
Perturbations

On étudie, dans cette partie, certains aspects de la théorie des perturbations, pour les systèmes hamiltoniens. On rappelle des résultats de cette théorie en apportant certaines précisions et certaines réponses aux questions qui surgissent lors des tentatives d'implantation des méthodes.

On entend par système perturbé, un système hamiltonien proche d'un système hamiltonien intégrable. Ici, l'étude de systèmes hamiltoniens perturbés consiste, d'une part, en la recherche d'intégrales premières formelles, d'autre part et lorsque c'est possible, en une étude qualitative de la stabilité du système au voisinage de points d'équilibre.

Les transformations de Lie peuvent fournir, dans un certain cadre, des méthodes construisant pas à pas des intégrales premières formelles sous forme de développement en séries de Lie qui, en général, ne convergent pas. De la connaissance des premiers termes de ces séries, on peut déduire des estimations asymptotiques plus fines pour des régions de stabilité (cf. Giorgilli *et al.* [25], ou les travaux de Giorgilli et Galgani, ou Simò [52]). Cette théorie est à rapprocher de celle de Nekhoroshev, cependant que nous ne considèrons que le cas des hamiltoniens non perturbés, linéaires en les actions.

Dans cette partie, on rappelle les deux méthodes induites par les deux types de transformations précédemment évoquées : la transformation de Dragt-finn et la transformation de Deprit. On prouve que dans certains cas, ces deux méthodes sont équivalentes.

On expose diverses façons de résoudre l'équation de perturbation, ce qui repose essentiellement sur la possibilité de réduire un opérateur hamiltonien linéaire dans une base symplectique.

12. Intégrales premières

On se place, pour tout ce qui suit, au voisinage d'un point d'équilibre du système hamiltonien, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$h = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k h_k, \tag{12.1}$$

où h_k est un polynôme de degré $k + 2$ et h_0, une forme quadratique que nous pouvons supposer non-dégénérée. h_0 est, par exemple, le Hamiltonien de n oscillateurs harmoniques non couplés

$$h_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\omega_l(p_l^2+q_l^2). \tag{12.2}$$

Pour un tel Hamiltonien les intégrales premières sont les actions $I_l = \frac{1}{2}(p_l^2+q_l^2)$ et on s'intéresse tout naturellement à la recherche d'intégrales premières du système perturbé.

On peut tenter de chercher directement les intégrales premières, sous forme de séries, considérées comme des perturbations des actions. On cherche alors

$$\xi_l = I_l + \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n\xi_{l,n}, \{\xi_l, h\} = 0, \quad 1\leq l\leq n. \tag{12.3}$$

On doit donc tenter de résoudre, pour tout $n\geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 = \{h,\xi_l\} &= \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n \sum_{p+q=n}\{h_p,\xi_{l,q}\} & (12.4)\\ &= \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n[\{h_0,\xi_{l,n}\} + \sum_{p=1}^{n}\{h_p,\xi_{l,n-p}\}] & (12.5)\\ &= \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n\left[\{h_0,\xi_{l,n}\} - \psi_{l,n}\right] & (12.6)\end{aligned}$$

dans lequel $\psi_{l,n}$ est connu dès lors que l'on connaît $\xi_{l,p}$, pour $0\leq p\leq n-1$.

La méthode est alors donnée pour tenter de construire formellement les intégrales premières : résoudre successivement, pour $n\geq 1$,

$$L_{h_0}\xi_{l,n} = \psi_{l,n}, \tag{12.7}$$

qui n'a pas nécessairement de solution.

Supposons donc que $h_0 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\omega_l\left(p_l^2+q_l^2\right)$. Dans ce cas, le changement de variables canonique

$$x_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_l + \mathrm{i}q_l\right), y_l = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(p_l - \mathrm{i}q_l\right), \quad 1\leq l\leq n, \tag{12.8}$$

transforme h_0 en $\mathrm{i}\sum_{l=1}^{n}\omega_l x_l y_l$. L_{h_0} est alors diagonalisable dans la base des monômes $x^i y^j$. On a

$$L_{h_0}x^j y^k = \mathrm{i}(k-j).\omega x^j y^k, \tag{12.9}$$

et la résolution de (12.7) peut se faire aisément, si on a pris soin de vérifier que $\psi_{l,n}$ est dans l'image de L_{h_0}. *A priori*, cela n'a aucune raison d'être, puisque à chaque étape, $\xi_{l,n}$ est défini à un élément du noyau de h_0 près. Dans certains cas, on montre directement (cf. [23, 22]) que l'on peut construire à chaque étape $\xi_{l,n}$ pour que l'équation (12.7) soit cohérente. Une des conditions est, par exemple, l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des ω_l (condition de non-résonance) et, d'autre part, (cf. [8]), la réversibilité de h, c'est-à-dire que $h(p,q) = h(p,-q)$.

⋆⋆⋆

Une autre approche consiste à effectuer un changement de variables qui transforme I_l en ξ_l, pour tout l. Ce changement de variables est une transformation canonique T, ou plutôt, une famille de transformations canoniques, qui transforme h en $K = T^{-1}h$.

$K = T^{-1}h$ est le Hamiltonien du système dans les variables Tz_i. K doit être construit de telle façon qu'on puisse y lire les intégrales premières. Un ordre r étant fixé, on exige, pour tout $1 \leq l \leq n$

$$\{K_p, I_l\} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq r, \tag{12.10}$$

ce qui signifie que les I_l sont des intégrales premières à l'ordre r. Notons alors

$$\xi_l^{(r)} = TI_l = \sum_{p \geq 0} \xi_{l,p}^{(r)} = I_l + \sum_{p \geq 1} \xi_{l,p}^{(r)}. \tag{12.11}$$

On déduit de (12.10) que

$$\{I_l, K\} = \sum_{p \geq r+1} \varepsilon^p \{I_l, K_p\}, \tag{12.12}$$

puis que

$$\begin{aligned} T\{I_l, K\} &= \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \sum_{p+q=n} T_{n-p}\{I_l, K_q\} \\ &= \sum_{n \geq r+1} \varepsilon^n \sum_{p=r+1}^{n} T_{n-p}\{I_l, K_p\}. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Mais

$$\left\{\xi_l^{(r)}, h\right\} = \; = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \sum_{p+q=n}^{r} \left\{\xi_{l,p}^{(r)}, h_q\right\} \tag{12.14}$$

et, puisque T est canonique, on a

$$T\{I_l, K\} = \{TI_l, TK\} = \left\{\xi_l^{(r)}, h\right\} \tag{12.15}$$

et

$$\left\{\xi_l^{(r)}, h\right\} = \sum_{n \geq r+1} \varepsilon^n \sum_{p+q=n} \left\{\xi_{l,p}^{(r)}, h_q\right\}, \tag{12.16}$$

et, pour tout $0 \leq n \leq r$,

$$\sum_{p=0}^{n} \left\{\xi_{l,p}^{(r)}, h_{n-p}\right\} = \left\{\xi_{l,n}^{(r)}, h_0\right\} + \sum_{p=1}^{n} \left\{\xi_{l,p}^{(r)}, h_{n-p}\right\} = 0. \tag{12.17}$$

En particulier, $\xi_l^{(r)}$ est une intégrale première de h, à l'ordre $r+1$ près.

D'une manière générale, un Hamiltonien K vérifiant une équation du type (12.10) est appelé une forme normale. La forme normale est déterminée par le type d'intégrales premières recherché. Nous allons maintenant montrer comment on construit formellement des formes normales.

13. Forme normale

On appelle forme normale d'un Hamiltonien h, une fonction K, image de h par un changement de variables canonique (symplectique), sur laquelle on peut lire de façon évidente les intégrales premières. Cette notion de forme normale est un peu vague et dépend fortement de l'utilisation qu'on attend d'elle.

Par exemple, si h est indépendant du temps, si $h_0 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\omega_l(p_l^2+q_l^2)$ et si les ω_l sont rationnellement indépendants, on dira que K est une forme normale de h, si K ne dépend que des actions, ou, ce qui revient au même dans ce cas, si h_0 est une intégrale première de K. On cherche K sous la forme

$$K = K_0 + \sum_{n\geq 1}\varepsilon^n K_n(I_1,\ldots,I_n). \tag{13.1}$$

On dira que K est une forme normale à l'ordre r si

$$K = \mathcal{Z}^{(r)} + \mathcal{R}^{(r)} \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}^{(r)} & = & \sum_{i=0}^{r}\mathcal{Z}_i^{(r)}(I_1,\ldots,I_l) \\ \mathcal{R}^{(r)} & = & \sum_{i\geq r+1}\mathcal{R}_i^{(r)}. \end{array}\right. \tag{13.2}$$

Si h vérifie les mêmes hypothèses que précédemment mais que les ω_l ne sont plus rationnellement indépendantes, on peut introduire le module de résonance $\mathcal{M}_\omega \subset \mathbb{Z}^n$,

$$\mathcal{M}_\omega = \{(k_1,\ldots,k_n); k.\omega = \sum_{l=1}^{n} k_l\omega_l = 0\}, \tag{13.3}$$

où n'importe quel sous-module $\mathcal{M}$ de $\mathbb{Z}^n$. En se plaçant alors dans les variables complexes (x_l, y_l) définies en (12.8), on dira que K est une forme normale, par rapport à $\mathcal{M}$, à l'ordre r si

$$K = \mathcal{Z}^{(r)} + \mathcal{R}^{(r)} \quad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}^{(r)} & = & \sum_{i=0}^{r}\sum_{\substack{|k|+|l|=r\\ k-l\in\mathcal{M}}} z_{k,l}x^k y^l \\ \mathcal{R}^{(r)} & = & \sum_{i\geq r+1} R_i^{(r)}. \end{array}\right. \tag{13.4}$$

On remarque que, pour $\mathcal{M} = \{0\}$, on a

$$\mathcal{Z}^{(r)} = \sum_{i=0}^{r}\sum_{\substack{|k|+|l|=r\\ k-l\in\mathcal{M}}} z_{k,l}x^k y^l = \sum_{i=0}^{r}\sum_{2|k|=r} z_k x^k y^k = \sum_{i=0}^{r}\sum_{2|k|=r} z_k I^k, \tag{13.5}$$

et l'on retrouve la forme normale précédente.

Si, par exemple, h est quasi-périodique, c'est-à-dire si h admet un développement en fonctions circulaires réciproques, on pourra tenter d'avoir pour forme normale, un Hamiltonien ne dépendant plus du temps.

L'idée maîtresse qui guide la construction de la forme normale, est la construction d'intégrales premières formelles.

13.1. Construction de la forme normale

On étudie ici la construction de formes normales, dans le cas autonome ou non-autonome. On suppose néanmoins, dans toute la suite, que $h = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n h_n$ où h_0 est intégrable. Dans tous les cas on tente de chercher une transformation canonique proche de l'identité,

$$T = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n T_n, \tag{13.6}$$

ce qui a l'avantage de donner des changements de variables explicites, contrairement aux autres méthodes qui donnent les changements de variables sous forme de fonctions implicites. On suppose que le nouveau Hamiltonien s'écrit

$$K = \sum_{n\geq 0}\varepsilon^n K_n. \tag{13.7}$$

Dans le cas général, on cherche une transformation canonique $T(\varepsilon, t)$, de classe C^2. Posons $Z = Tz$, on a, pour $1 \leq i, j \leq 2n$,

$$\{Z_i, Z_j\} = \{z_i, z_j\} = \sum_{k,l=1}^{2n} \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} J_{k,l} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l}. \tag{13.8}$$

Mais T est de classe C^2, donc les dérivations partielles commutent et l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\{Z_i, Z_j\} &= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial t \partial z_k} J_{k,l} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} J_{k,l} \frac{\partial^2 Z_j}{\partial t \partial z_l} \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\left[\frac{\partial Z_i}{\partial t}\right] J_{k,l} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} J_{k,l} \frac{\partial}{\partial z_l}\left[\frac{\partial Z_j}{\partial t}\right] \\
&= \left\{\frac{\partial Z_i}{\partial t}, Z_j\right\} + \left\{Z_i, \frac{\partial Z_j}{\partial t}\right\} = 0, \qquad (13.9)
\end{aligned}$$

et de la même manière

$$\left\{\frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon}, Z_j\right\} + \left\{Z_i, \frac{\partial Z_j}{\partial \varepsilon}\right\} = 0. \tag{13.10}$$

En utilisant le lemme 26, on déduit l'existence de deux fonctions u et v, telles que, pour tout $1 \leq i \leq 2n$, on ait

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon} = \{Z_i, u\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z_i}{\partial t} = \{Z_i, v\}, \tag{13.11}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = -TL_u \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -TL_v, \tag{13.12}$$

et pour les inverses,

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial \varepsilon} = L_u T^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T^{-1}}{\partial t} = L_v T^{-1}. \tag{13.13}$$

Par ailleurs, pour les nouvelles variables Z_i, on a (cf. 9.32)

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_i &= \frac{\partial Z_i}{\partial t} + \{Z_i, h(z, t, \varepsilon)\} && (13.14)\\
&= \frac{\partial Z_i}{\partial t} + \left\{Z_i, h(T^{-1}Z, t, \varepsilon)\right\} && (13.15)\\
&= \{Z_i, v\} + \{Z_i, H(Z, t, \varepsilon)\} && (13.16)\\
&= \{Z_i, K(Z, t, \varepsilon)\}. && (13.17)
\end{aligned}$$

Ici,

$$K = H + v = T^{-1}h + v \tag{13.18}$$

est le Hamiltonien du système hamiltonien exprimé dans les nouvelles variables $Z_i = Tz_i$. En dérivant (13.18) par rapport à ε, on trouve

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} K + T \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial Tv}{\partial \varepsilon}, \tag{13.19}$$

donc, d'après (13.12),

$$-L_u K + \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} = T^{-1}\frac{\partial h}{\partial \varepsilon} + T^{-1}\frac{\partial T v}{\partial \varepsilon}. \tag{13.20}$$

Mais

$$\begin{aligned}
L_{\frac{\partial T v}{\partial \varepsilon}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[L_{Tv}\right] && (13.21)\\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[T L_v T^{-1}\right] && (13.22)\\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[T \frac{\partial}{\partial t} T^{-1}\right] && (13.23)\\
&= \frac{\partial T}{\partial \varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}T^{-1} + T\frac{\partial^2 T^{-1}}{\partial \varepsilon \partial t} && (13.24)\\
&= -T L_u \frac{\partial}{\partial t}T^{-1} + T\frac{\partial^2 T^{-1}}{\partial t \partial \varepsilon} && (13.25)\\
&= -T L_u \frac{\partial}{\partial t}T^{-1} + T\frac{\partial}{\partial t}\left[L_u T^{-1}\right] && (13.26)\\
&= T L_{\frac{\partial u}{\partial t}} T^{-1} && (13.27)\\
&= L_{T\frac{\partial u}{\partial t}}. && (13.28)
\end{aligned}$$

On a donc, à une constante indépendante des variables de phase près,

$$\frac{\partial T v}{\partial \varepsilon} = T\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{13.29}$$

L'équation (13.20) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} - T^{-1}\frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - L_u K. \tag{13.30}$$

Posons maintenant $u = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$, pour que les notations soient cohérentes avec les parties précédentes, et recherchons w sous la forme $w = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n w_n$. T et T^{-1} sont définies par leur séries et l'on a

$$T_0 = T_0^{-1} = I, \quad T_n = -\sum_{p=1}^{n} \tfrac{p}{n} T_{n-p} L_{w_p} \quad T_n^{-1} = \sum_{p=1}^{n} \tfrac{p}{n} L_{w_p} T_{n-p}^{-1}. \tag{13.31}$$

En identifiant terme à terme les éléments de la série (13.20), on a

$$n\frac{\partial w_n}{\partial t} = nK_n - \sum_{p=1}^{n} p T_{n-p}^{-1} h_p - \sum_{p=1}^{n} L_{u_p} K_{n-p}, \tag{13.32}$$

donc

$$n\frac{\partial w_n}{\partial t} = nK_n - nh_n - \sum_{p=1}^{n-1} p T_{n-p}^{-1} h_p - \sum_{p=1}^{n-1} L_{u_p} K_{n-p} - \{w_n, h_0\}. \tag{13.33}$$

On obtient l'équation de perturbation, qu'il s'agit de résoudre, pour tout n,

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} + \{w_n, h_0\} = K_n - h_n - \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n}\left[T_{n-p}^{-1} h_p + L_{w_p} K_{n-p}\right]. \tag{13.34}$$

Cette équation se résout par rapport à w_n et K_n en utilisant (9.40) . On doit choisir K_n de telle façon que l'équation ait une solution en w_n et que K_n ait une forme convenable. Nous préciserons ces conditions par la suite.

13.2. Méthode de Deprit

La méthode de Deprit est la méthode précédemment évoquée puisqu'elle fait intervenir la transformation de Deprit. Cette méthode est surtout employée pour les Hamiltoniens autonomes. On a vu, cependant, qu'elle s'adapte très bien au cas non-autonome, pourvu qu'on puisse résoudre l'équation de perturbation (13.34).

Dans le cas autonome, on a $K = T^{-1}h$, c'est-à-dire, pour chaque terme

$$K_n = \sum_{p=0}^{n} T_p^{-1} h_{n-p} \tag{13.35}$$

$$= T_n^{-1} h_0 + h_n + \sum_{p=1}^{n-1} T_p^{-1} h_{n-p} \tag{13.36}$$

$$= \{w_n, h_0\} + h_n + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n}[L_{w_p} T_{n-p}^{-1} h_0] + T_p^{-1} h_{n-p}. \tag{13.37}$$

On obtient l'équation de perturbation

$$\{h_0, w_n\} + K_n = h_n + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n} L_{w_p} T_{n-p}^{-1} h_0 + T_p^{-1} h_{n-p}. \tag{13.38}$$

On peut aussi utiliser directement (13.34) qui donne

$$\{w_n, h_0\} = K_n - h_n - \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n} \left[T_{n-p}^{-1} h_p + L_{w_p} K_{n-p}\right], \tag{13.39}$$

c'est-à-dire,

$$\{h_0, w_n\} + K_n = h_n + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n} \left[T_{n-p}^{-1} h_p + L_{w_p} K_{n-p}\right]. \tag{13.40}$$

13.3. Méthode de Dragt-Finn

Avec la méthode de Dragt-Finn, on cherche la transformation, sous forme de transformation de Dragt-Finn. Dans le cas autonome, de $K = M^{-1}h$, on déduit que

$$K_n = \sum_{p=0}^{n} M_p^{-1} h_{n-p} \tag{13.41}$$

$$= M_n^{-1} h_0 + h_n + \sum_{p=1}^{n-1} T_p^{-1} h_{n-p} \tag{13.42}$$

$$= \{g_n, h\}_0 + h_n + \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n-1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h_0 + \sum_{p=1}^{n-1} M_p^{-1} h_{n-p}. \tag{13.43}$$

On en déduit, comme pour la méthode de Deprit, l'équation de perturbation

$$\{h_0, g_n\} + K_n = h_n + \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n-1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h_0 + \sum_{p=1}^{n-1} M_p^{-1} h_{n-p}. \tag{13.44}$$

On peut également utiliser la suite auxiliaire

$$K^{(0)} = h,\, K^{(p)} = e^{\varepsilon^p L_{g_p}} K^{(p-1)}. \tag{13.45}$$

Les éléments successifs sont définis par

$$K_k^{(n)} = \sum_{np+q=k} \frac{L_{g_n}^p}{p!} K_q^{(n-1)}, \tag{13.46}$$

et, en particulier,

$$K_n = K_n^{(n)} = \{g_n, h_0\} + K_n^{(n-1)}. \tag{13.47}$$

On obtient alors l'équation de perturbation sous la forme

$$\{h_0, g_n\} + K_n = K_n^{(n-1)}. \tag{13.48}$$

⋆⋆⋆

Dans le cas non-autonome, on ajoute un degré de liberté à l'espace des phases (cf [7]), dont le temps t, si bien qu'on doit avoir comme nouveau crochet de Poisson $\{,\}'$:

$$L'_f g = \{f, g\}' = \{f, g\} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial e} - \frac{\partial f}{\partial e}\frac{\partial g}{\partial t}. \tag{13.49}$$

De $\dot{t} = 1 = \frac{\partial h'}{\partial e}$ et $\dot{e} = -\frac{\partial h'}{\partial t}$, il suffit de prendre $h' = h + e$, c'est-à-dire,

$$h' = h_0 + e + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n h_n. \tag{13.50}$$

On cherche alors une série,

$$g(\varepsilon, t) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n g_n(t), \tag{13.51}$$

et un nouveau Hamiltonien

$$K = {M'}^{-1} h = \cdots e^{\varepsilon^n L'_{g_n}} \cdots e^{\varepsilon L'_{g_1}} h. \tag{13.52}$$

Ici, puisque $\frac{\partial h_n}{\partial e} = 0$, si $n \geq 1$, on a

$$L'_{g_k} h_n = L_{g_k} h_n, \tag{13.53}$$

et pour le premier terme h_0

$$L'_{g_k} h_0 = L_{g_k} h_0 + \tfrac{\partial g_k}{\partial t} \quad \text{et} \quad L'_{g_p} L'_{g_q} h_0 = L_{g_p} L_{g_q} h_0. \tag{13.54}$$

En particulier, pour la transformation de Dragt-Finn, on a

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{p=0}^{n} {M'}_p^{-1} h'_{n-p} && (13.55) \\ &= {M'}_n^{-1} h_0 + \sum_{p=0}^{n-1} M_p^{-1} h_{n-p} && (13.56) \end{aligned}$$

$$= \quad L'_{g_n} h'_0 + \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n-1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h'_0 + \sum_{p=0}^{n-1} M_p^{-1} h_{n-p} \tag{13.57}$$

$$= \quad \frac{\partial g_n}{\partial t} + L_{g_n} h_0 + \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n-1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h_0 + \sum_{p=0}^{n-1} M_p^{-1} h_{n-p} \tag{13.58}$$

$$= \quad \frac{\partial g_n}{\partial t} + \sum_{p=0}^{n} M_p^{-1} h_{n-p}, \tag{13.59}$$

ce qui donne l'équation de perturbation

$$\frac{\partial g_n}{\partial t} + \{g_n, h_0\} = K_n - h_n - \sum_{\wp(1,n-1;n)} \frac{L_{g_{n-1}}^{m_{n-1}} \cdots L_{g_1}^{m_1}}{m_1! \cdots m_{n-1}!} h_0 - \sum_{p=1}^{n-1} M_p^{-1} h_{n-p}. \tag{13.60}$$

En utilisant la suite auxiliaire

$$K^{(0)} = h, K^{(p)} = e^{\varepsilon^p L'_{g_p}} K^{(p-1)}, \tag{13.61}$$

on obtient, de la même façon que pour le cas autonome,

$$\frac{\partial g_n}{\partial t} + \{g_n, h_0\} = K_n - K_n^{(n-1)}. \tag{13.62}$$

13.4. Algorithmes de calcul de la forme normale et de la série génératrice

On suppose ici que l'on a un algorithme pour résoudre l'équation de perturbation qui intervient dans les diverses méthodes. On désigne par **solve** un tel algorithme. Pour la méthode de Dragt-Finn comme pour la méthode de Deprit, on peut utiliser presque les mêmes algorithmes que pour le calcul des transformations inverses (cf. pages 49-50). On se donne $h = h_0 + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^n h_n$.

Pour la méthode de Deprit, on construit le même tableau $K^w(p,q)$, mais, à chaque boucle, on doit résoudre l'équation de perturbation (13.38)

$$L_{h_0} w_n + K_n^w = R_n^w = \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n} \{w_p, K^w(n-p, 0)\} + \sum_{p=1}^{n-1} K^w(n-p, p). \tag{13.63}$$

On utilise l'algorithme suivant :

pour $i := 1$ **à** r **faire**
  pour $j := 1$ **à** $i-1$ **faire**
    pour $k := 1$ **à** j **faire** $K_{j,i-j} := K_{j,i-j} + \frac{k}{j}\{w_k, K_{j-k,i-j}\}$;
    $R_i := R_i + K_{j,i-j}$;
  pour $k := 1$ **à** $i-1$ **faire**
    $R_i := R_i + \frac{k}{i}\{w_k, K_{i-k,0}\}$
    $K_{i,0} := K_{i,0} + \frac{k}{i}\{w_k, K_{i-k,0}\}$;
  solve $L_{h_0} w_i + K_i = R_i$
  $K_{i,0} := K_{i,0} + \{w_i, K_{0,i}\}$.

Avec la méthode de Dragt-Finn, on remplace le calcul de $K_n^{n,1}$ par la résolution de l'équation (13.40)

$$L_{h_0} g_n + K_n^{n,1} = K_n^{n-1}. \tag{13.64}$$

L'algorithme utilisé est le suivant :

pour $i := 1$ **à** r **faire**
  solve $L_{h_0} g_i + K_{i,i} = K_{i-1,i}$;
  pour $k := i + 1$ **à** r **faire**
    pour $j := 1$ **à** $\left[\frac{k}{i}\right]$ **faire** $K_{i+j-1,k} := \frac{1}{j}\{g_i, K_{i+j-2,k-i}\}$;
  pour $k := i$ **à** r **faire**
    pour $j := 2$ **à** $\left[\frac{k}{i}\right]$ **faire** $K_{i,k} := K_{i,k} + K_{i+j-1,k}$
    $K_{i,k} := K_{i,k} + K_{i-1,k}$.

Le coût de la résolution de l'équation de perturbation par l'algorithme **solve** étant le même pour les deux méthodes, la différence se fait sur le nombre d'évaluations respectives, c'est-à-dire en faveur de la méthode de Dragt-Finn. Ces résultats sont en partie confirmés par l'étude, réalisée par Fried & Ezra ([21]), sur le Hamiltonien de Hénon & Heiles. Cependant, en l'absence de description de l'algorithme pour calculer le transformation de Dragt-Finn, on peut penser que celui-ci pourrait être amélioré, ce qui confirmerait la plus grande rapidité de la méthode de Dragt-Finn.

14. Résolution de l'équation de perturbation

Que ce soit avec la méthode de Dragt-Finn ou avec la méthode de Deprit, l'algorithme de calcul de la forme normale d'un Hamiltonien h passe par la résolution des équations de perturbation (13.34), (13.38), (13.40), (13.44), (13.48), (13.60) ou (13.62). Dans le cas autonome, l'équation de perturbation se résume en

$$\{h_0, w_n\} + K_n = R_n, \tag{14.1}$$

et pour le cas non-autonome, à

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} + \{w_n, h_0\} = K_n - R_n. \tag{14.2}$$

À chaque étape on doit résoudre (14.1) ou (14.2) en choisissant K_n de telle façon qu'il soit plus simple, ou de telle manière qu'on puisse y lire des intégrales premières. L'équation (14.2) peut se résoudre, une fois choisi K_n, en faisant agir le flot de h_0 et en utilisant (9.40).

14.1. Cas d'oscillateurs harmoniques non-couplés

Supposons ici que

$$h_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \omega_l (p_l^2 + q_l^2),$$

où les ω_l sont rationnellement indépendants. En effectuant le changement de variables canonique (12.8),

$$x_l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_l + \mathrm{i}q_l\right), y_l = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\left(p_l - \mathrm{i}q_l\right), \tag{14.3}$$

h_0 devient $\mathrm{i}\sum_{l=1}^{n}\omega_l x_l y_l$ et L_{h_0} est diagonalisée dans la base des monômes $x^i y^j$. En particulier, l'image et le noyau de L_{h_0} sont en somme directe. De plus, puisque les ω_l sont rationnellement indépendants, $x^j y^k \in \mathrm{Ker} L_{h_0}$ si

$$L_{h_0} x^j y^k = \mathrm{i}(k-j).\omega x^j y^k = 0, \tag{14.4}$$

c'est-à-dire, si $k = j$. Remarquant que

$$x^k y^k = x_1^{k_1} y_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} y_n^{k_n} = \left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}(p_1^2 + q_1^2)\right)^{k_1} \cdots \left(\tfrac{\mathrm{i}}{2}(p_n^2 + q_n^2)\right)^{k_n}, \tag{14.5}$$

le noyau de L_{h_0} est alors constitué des combinaisons linéaires de produits d'actions.

La résolution de l'équation de perturbation (14.1) est alors la décomposition de R_n sur l'image et le noyau de L_{h_0}.

Dans la base de vecteurs propres $x^j y^k$, on opère de la façon suivante : si

$$R_n = \sum_{|j|+|k|=n} r_{j,k} x^j y^k, \tag{14.6}$$

on prend

$$K_n = \sum_{\substack{|j|+|k|=n \\ j=k}} r_{j,k} x^j y^k \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{\substack{|j|+|k|=n \\ j\neq k}} \frac{r_{j,k}}{i(j-k).\omega} x^j y^k. \tag{14.7}$$

Une autre façon de procéder est de considérer K_n comme la projection de R_n sur le noyau de L_{h_0}, puis de résoudre

$$L_{h_0} L_{h_0} w_n = L_{h_0} R_n, \tag{14.8}$$

qui a une solution unique puisque L_{h_0} est un isomorphisme sur son image. Cette méthode peut s'avérer meilleure, si le changement de variables (14.1) est coûteux.

Dans tous les cas, on construit K, pas à pas, de telle façon que h_0 soit une intégrale première. De

$$h_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \omega_l (p_l^2 + q_l^2) = \sum_{l=1}^{n} r_l \tag{14.9}$$

où les r_l sont en involution, on déduit que les r_l sont n intégrales premières de K.

14.1.1. Étude du pendule à l'ordre 4 par la méthode de Dragt-Finn

On utilise les coordonnées cartésiennes et

$$h = \tfrac{1}{2}p^2 + (1 - \cos q) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) - \tfrac{1}{24}q^4 + \tfrac{1}{720}q^6 + \cdots. \tag{14.10}$$

La première équation issue de (13.44) donne

$$\{h_0, g_1\} + K_1 = h_1 = 0, \tag{14.11}$$

qui peut se résoudre par $K_1 = h_1 = g_1 = 0$. Puis, pour $n = 2$, on a

$$L_{h_0} L_{h_0} g_2 = L_{h_0}\left(-\tfrac{1}{24}q^4\right) \quad \text{qui donne} \quad g_2 = -\tfrac{5}{192}q^3 p - \tfrac{1}{64}qp^3, \tag{14.12}$$

et on obtient

$$K_2 = \{g_2, h_0\} + h_2 = -\tfrac{1}{64}\left(p^2 + q^2\right)^2. \tag{14.13}$$

Pour $n = 3$, on obtient comme précédemment

$$g_3 = 0, K_3 = 0. \tag{14.14}$$

Enfin

$$L_{h_0}^2 g_4 = L_{h_0}\left(-\tfrac{49}{30720}q^6 - \tfrac{23}{6144}q^4p^2 + \tfrac{3}{2048}q^2p^4 + \tfrac{1}{2048}p^6\right), \tag{14.15}$$

qui donne

$$g_4 = -\tfrac{17}{15360}q^5p - \tfrac{1}{384}q^3p^3 + \tfrac{1}{1024}qp^5. \tag{14.16}$$

On a donc

$$K_4 = \{g_4, h_0\} - \tfrac{49}{30720}q^6 - \tfrac{23}{6144}q^4p^2 + \tfrac{3}{2048}q^2p^4 + \tfrac{1}{2048}p^6 = -\tfrac{1}{2048}(p^2+q^2)^3. \tag{14.17}$$

On trouve donc à l'ordre 4

$$K = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2) - \tfrac{1}{64}(p^2+q^2)^2 - \tfrac{1}{2048}(p^2+q^2)^3 + \cdots. \tag{14.18}$$

14.2. Réduction de la partie linéaire

Tous les Hamiltoniens linéaires n'étant pas des Hamiltoniens d'oscillateurs non couplés, on peut se poser la question de savoir si on peut s'y ramener par changement de variables symplectique, ou, si on peut se ramener à une forme diagonale.

Dans le cas où on peut trouver un changement de variables symplectique qui diagonalise L_{h_0}, on pourra alors résoudre l'équation de perturbation en passant aux variables complexes (12.8).

Posons $H = L_{h_0}$, l'opérateur de la partie linéaire de h. De $JH^T + HJ = 0$, on déduit que les valeurs propres de H sont deux à deux opposées et comme H est un opérateur réel, qu'elles sont deux à deux conjuguées. D'autre part, si $Hx = \lambda x$ et $Hy = \mu y$ alors

$$\omega(x, Hy) + \omega(Hx, y) = (\lambda + \mu)\omega(x, y) = 0, \tag{14.19}$$

donc si $\lambda + \mu \neq 0$, on a $\omega(x, y) = 0$.

⋆⋆⋆

Démontrons tout d'abord un lemme qui permet de nous ramener à des systèmes à un degré de liberté.

Lemme 29. — *Si h_0 est définie positive ou si les valeurs propres de $H = L_{h_0}$ sont distinctes, alors l'espace des phases E se décompose en*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i, \tag{14.20}$$

où les P_i sont des plans stables pour L_{h_0}, orthogonaux pour ω.

• Si $h_0 = \frac{1}{2}\omega(x, H(x))$ est définie positive, h_0 définit un produit scalaire sur l'espace des phases. Il existe donc une matrice U du groupe linéaire telle que $U^T JHU = I$. Mais alors, $J_1 = U^T JU$ est la matrice antisymétrique d'un endomorphisme de rang $2n$, $u = -u^*$. De $u^{2*} = (-u)(-u) = u^2$, on déduit que u^2 est auto-adjoint pour le produit scalaire, défini par I, donc diagonalisable. Soit x un vecteur propre de u^2, alors $P_x =< x, u(x) >$ est un plan stable par u (les seuls vecteurs propres de u sont les éléments du noyau), tout comme son orthogonal l'est par u^*, donc par u. On peut donc décomposer l'espace en somme de plans orthogonaux stables par u : $E = \bigoplus_{i=1}^n P_i$.

• Dans le cas général, le polynôme caractéristique de H s'écrit $\prod_{l=1}^n (x^2 - \lambda_l^2)$, où les λ_l sont valeurs propres de H. On en déduit que, si les λ_l sont distincts, bien que ce ne soit pas toujours nécessaire, alors

$$E = \bigoplus_{l=1}^{n} \ker\left(H^2 - \lambda_l^2 I\right) = \bigoplus_{l=1}^{n} P_l, \tag{14.21}$$

où les P_l sont les espaces propres associés à $H^2 - \lambda_l^2 I$ et sont deux à deux orthogonaux (d'après 14.19) pour la forme symplectique ω.

⋆⋆⋆

Par la suite, on se place dans le cas où l'espace E se décompose en somme directe de plans orthogonaux pour ω. Après un changement de base symplectique, on peut alors écrire (cf. [53]),

$$h_0 = \sum_{l=1}^{n} r_l, \quad \text{où} \quad r_l = \tfrac{1}{2}\alpha_l q_l^2 + \beta_l q_l p_l + \tfrac{1}{2}\gamma_l p_l^2, \tag{14.22}$$

et, en particulier, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\left[L_{r_l}, L_{r_j}\right] = L_{\{r_l, r_j\}} = 0. \tag{14.23}$$

⋆⋆⋆

Par simple calcul, ou en utilisant (8.12), on déduit la forme de la matrice de L_{r_l} dans la base p_l, q_l :

$$\begin{pmatrix} -\beta_l & \gamma_l \\ \alpha_l & \beta_l \end{pmatrix}. \tag{14.24}$$

Les valeurs propres, $\pm\lambda_l$, de L_{r_l}, sont données par

$$\lambda_l = \sqrt{\beta_l^2 - \alpha_l \gamma_l}. \tag{14.25}$$

Suivant les valeurs des $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$, on trouve un jeu de vecteurs propres qui forment une base symplectique (non nécessairement réelle), sauf si un des λ_l est nul, auquel cas, L_{r_l} est nilpotent.

• Si r_l est définie, alors $\beta_l^2 - \alpha_l \gamma_l < 0$ et

$$\lambda_l = \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha_l \gamma_l - \beta_l^2} = \pm \mathrm{i}\omega_l. \tag{14.26}$$

Soit $e_l + \mathrm{i} f_l$, tel que $H(e_l + \mathrm{i} f_l) = \mathrm{i}\omega_l(e_l + if_l)$. On a alors, par exemple dans le cas défini positif, $He_l = -\omega_l f_l$, $Hf_l = \omega_l e_l$ et

$$h(f_l) = \tfrac{1}{2}\omega(f_l, Hf_l) = \tfrac{1}{2}\omega_l \omega(f_l, e_l) > 0. \tag{14.27}$$

Posons $P_l = \sqrt{\frac{2}{\omega_l}} e_l$, $Q_l = \sqrt{\frac{2}{\omega_l}} f_l$. On a $\omega(P_l, Q_l) = 1$ et, par conséquent, (P_l, Q_l) forme une base symplectique dans laquelle

$$r_l = \pm \tfrac{1}{2} w_l (P_l^2 + Q_l^2). \tag{14.28}$$

En conclusion, si la restriction de h à chaque sous espace propre de H est définie, h_0 peut être rendue orthogonale dans une base symplectique réelle, L_{h_0} est diagonalisable et, en particulier, son image et son noyau sont en somme directe, ce qui rend l'équation de perturbation cohérente.

• Si $\beta_l^2 - \alpha_l \gamma_l > 0$, posons e_l et f_l, les vecteurs propres de L_{r_l}, $He_l = \lambda_l e_l$ et $Hf_l = -\lambda_l f_l$. e_l et f_l sont indépendants et $(P_l, Q_l = \frac{1}{\{e_l, f_l\}} f_l)$ forme une base symplectique dans laquelle

$$r_l = \tfrac{1}{2}\lambda_l (P_l^2 - Q_l^2). \tag{14.29}$$

$\star\star\star$

Comme L_{h_0} est une dérivation, on déduit que, si a et b sont des vecteurs propres de L_{h_0}, associés aux valeurs propres λ_a et λ_b, alors

$$\{h_0, ab\} = a\{h_0, b\} + \{h_0, a\}b = (\lambda_a + \lambda_b)ab, \tag{14.30}$$

ce qui prouve que ab est vecteur propre de L_{h_0}.

Supposons que l'on ait diagonalisé L_{h_0} dans une base symplectique (x, y) de E_1. L'isomorphisme $(p, q) \mapsto (x, y)$ de E_1 se prolonge en un isomorphisme d'anneau sur l'anneau des polynômes E ce qui fait que pour chaque degré n, l'ensemble des produits des d'éléments de la base symplectique est une base de E_n, base de vecteurs propres de la restriction de L_{h_0} à E_n.

14.3. Cas général autonome

Dans ce paragraphe, reprenons l'idée développée par Steinberg ([53]), d'utiliser une structure euclidienne et de chercher des adjoints à L_{h_0}. On montre néanmoins que les cas intéressants se ramènent au cas où L_{h_0} est diagonalisable.

L'idée qui guide le choix de K_n est la recherche d'intégrales premières en involution. Le premier pas étant la construction d'une intégrale première, on cherche une fonction h^*, telle que, pour tout n, on ait $\{h^*, K_n\} = 0$. On tente donc de trouver h^*, tel que l'équation

$$L_{h_0} w_n + K_n = R_n \quad \text{et} \quad L_{h^*} K_n = 0 \tag{14.31}$$

admette une solution. On cherche h^*, tel que L_{h^*} soit un isomorphisme sur l'image de $L_{h_0}^*$.

Dans le cas où L_{h_0} est un isomorphisme sur son image (par exemple, diagonalisable dans chaque espace homogène), on peut prendre $h^* = h_0$. Mais en général, L_{h_0} n'est pas un isomorphisme sur son image.

L'idée est de trouver h^*, tel que L_{h^*} soit l'adjoint de L_{h_0}, pour une certaine structure euclidienne (cf. Steinberg, [53]). Pour $x_{i,j} = p^i q^j \in E_k$, avec $|i| + |j| = k$, considérons le produit scalaire qui rend la base $x_{i,j}$ orthogonale et tel que

$$(x_{i,j} \mid x_{i,j}) = i_1! \cdots i_n! j_1! \cdots j_n!. \tag{14.32}$$

En remarquant que

$$(\frac{\partial x_{i,j}}{\partial q_l} \mid x_{r,s}) = (x_{i,j} \mid q_l x_{r,s}) \quad \text{et} \quad (\frac{\partial x_{i,j}}{\partial p_l} \mid x_{r,s}) = (x_{i,j} \mid p_l x_{r,s}), \tag{14.33}$$

on déduit par linéarité, pour $x_k, y_k \in E_k$, que

$$(\frac{\partial x}{\partial q_l} \mid y) = (x \mid q_l y) \quad \text{et} \quad (\frac{\partial x}{\partial p_l} \mid y) = (x \mid p_l y). \tag{14.34}$$

Mais alors

$$(\{p_i p_j, x\} \mid y) = (p_i \frac{\partial x}{\partial q_j} + p_j \frac{\partial x}{\partial q_i} \mid y) = (x \mid q_j \frac{\partial y}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial y}{\partial p_j}) = (x \mid -\{q_i q_j, y\}) \tag{14.35}$$

$$(\{p_i q_j, x\} \mid y) = (-p_i \frac{\partial x}{\partial p_j} + q_j \frac{\partial x}{\partial p_i} \mid y) = (x \mid -q_i \frac{\partial y}{\partial q_j} + p_j \frac{\partial y}{\partial p_i}) = (x \mid \{q_i p_j, y\}) \tag{14.36}$$

et on déduit que

$$(\{h_0(p,q), x\} \mid y) = (x \mid -\{h_0(-q,p), y\}), \tag{14.37}$$

ce qui fait que

$$h^*(p,q) = -h_0(-q,p) \tag{14.38}$$

vérifie

$$L_{h_0^*} = L_{h_0}^*. \tag{14.39}$$

Dans le cas où $h^* = h_0^*$, l'équation (14.31) admet une solution pour tout $n \geq 1$. Si, de plus, $\{h^*, h_0\} = 0$, alors h^* est une intégrale première de la forme normale. Dans le cas où $\{h^*, h_0\} = 0$, alors $[L_{h_0}, L_{h_0}^*] = 0$, ce qui fait que L_{h_0} commute avec son adjoint (endomorphisme normal) et est donc diagonalisable (éventuellement dans une base complexe, non symplectique). En particulier, le noyau et l'image de L_{h_0} sont en somme directe. On peut en fait prendre h_0 comme intégrale première du nouveau Hamiltonien.

Si $h_0 = \sum_{l=1}^n r_l$ où les r_l sont en involution, alors

$$\{h^*, h_0\} = 0 \Leftrightarrow \{r_l, r_l^*\} = 0, \quad 1 \leq l \leq n. \tag{14.40}$$

Si $r_l = \frac{1}{2}\alpha_l q_l^2 + \beta_l q_l p_l + \frac{1}{2}\gamma_l p_l^2$, alors $r_l^* = -\frac{1}{2}\gamma_l q_l^2 + \beta_l q_l p_l - \frac{1}{2}\gamma_l p_l^2$ et

$$\{r_l, r_l^*\} = (\alpha_l + \gamma_l)(\beta_l q_l^2 + (\gamma_l - \alpha_l) q_l p_l - \beta_l p_l^2). \tag{14.41}$$

On en déduit alors que $\{r_l, r_l^*\} = 0$ si $r_l = \frac{1}{2}\omega_l(p_l^2 + q_l^2)$ ou si $r_l = \frac{1}{2}\omega_l(p_l^2 - q_l^2 + \beta_l p_l q_l)$, ce qui permet de se ramener au cas $r_l = \frac{1}{2}\omega_l(P_l^2 - Q_l^2)$.

⋆⋆⋆

En conclusion, on se ramène le plus souvent à rechercher h_0 comme intégrale première du nouveau Hamiltonien. Lorsque un des r_l est nilpotent, cela pourra poser problème.

Suivant les cas, il peut être plus ou moins coûteux de réduire L_{h_0} dans une base symplectique, pour résoudre l'équation de perturbation, ou de résoudre $L_{h^*} L_{h_0} x = L_{h^*} y$, directement en employant des techniques d'algèbre linéaire.

14.4. Équation non-autonome

Avec les mêmes hypothèses sur h_0 (12.9), on peut également résoudre l'équation de perturbation (14.2), puisqu'on connaît le flot de h_0. Passant en variables angles-actions

$$J_l = \tfrac{1}{2}(p_l^2 + q_l^2), \Phi_l = \mathrm{arctg}^{-1}\left(\tfrac{p_l}{q_l}\right), \quad 1 \le l \le n, \tag{14.42}$$

on a, sous l'action de h_0,

$$J_l(t) = J_l(0), \Phi_l(t) = \Phi_l(0) + \omega_l t, \quad 1 \le l \le n. \tag{14.43}$$

Que les h_i ne dépendent pas du temps où en dépendent par des fonctions circulaires, on résoudra l'équation de perturbation (14.2) en choisissant K_n comme le terme constant de R_n. On a alors

$$w_n(t) = S_{h_0}(0,t)\int_{t'} K_n(-t') - R_n(-t')dt'. \tag{14.44}$$

Dans le cas où h est indépendant du temps, on écrit

$$S_{h_0}(0,t)R_n(p(t),q(t)) = \sum_{|l|+|m|=n} r_{l,m} I^{\frac{l+m}{2}} e^{i(l-m).(\Phi+t\omega)} \tag{14.45}$$

et l'on prend, par conséquent,

$$K_n = \sum_{\substack{|l|+|m|=n \\ l=m}} r_{l,m} I^{\frac{l+m}{2}} = \sum_{l_1+\cdots+l_n=n} r_{l,l} I_1^{l_1}\cdots I_n^{l_n} \tag{14.46}$$

et

$$w_n = S(0,t)\sum_{\substack{|l|+|m|=n \\ l\neq m}} r_{l,m} J^{\frac{l+m}{2}} \int_{t'} e^{i(l-m).(\Phi-t'\omega)}dt' \tag{14.47}$$

$$= \sum_{\substack{|l|+|m|=n \\ l\neq m}} \frac{r_{l,m}}{i(l-m).\omega} J^{\frac{l+m}{2}} e^{i(l-m).\Phi}. \tag{14.48}$$

On retrouve le même résultat qu'avec la résolution de (14.1).

14.4.1. Étude du pendule à l'ordre 4 par la méthode de Deprit

Considérons le Hamiltonien du pendule

$$h = \tfrac{1}{2}p^2 + (1-\cos q) = \tfrac{1}{2}(p^2+q^2) + \sum_{p\ge 1}\frac{(-1)^p}{(2p)!}q^{2p+2}. \tag{14.49}$$

Le flot de h_0 est donné par

$$q(t) = p(0)\sin(t) + q(0)\cos(t), p(t) = p(0)\cos(t) - q(0)\sin(t). \tag{14.50}$$

On utilise les coordonnées angle-action, c'est-à-dire $j = \frac{1}{2}(p^2+q^2), \theta = \mathrm{arctg}^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$. L'application au temps t du flot de h_0 devient

$$j = j_0, \theta = \theta_0 + t. \tag{14.51}$$

On a

$$h_0 = j, h_1 = 0, h_2 = -\tfrac{j^2}{48}\left(3 + 4\cos(2\theta) - \cos(4\theta)\right), h_3 = 0,$$
$$h_4 = -\tfrac{j^3}{2080}\left(-10 + 15\cos(2\theta) - 6\cos(4\theta) + \cos(6\theta)\right).$$

La première équation issue de (13.34) donne

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \{w_1, h_0\} + K_1 = h_1 = 0 \tag{14.52}$$

que l'on peut résoudre en prenant $K_1 = h_1 = 0$ et $w_1 = 0$. Pour $n = 2$, on obtient

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \{w_2, h_0\} = 2\left(K_2 + \tfrac{j^2}{48}\left(3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)\right)\right), \tag{14.53}$$

que l'on résout en prenant $K_2 = -\frac{1}{16}j^2$ et

$$w_2 = \int_t \tfrac{j^2}{24}\left(4\cos(2(\theta - t)) - \cos(4(\theta - t))\right) dt = \tfrac{j^2}{96}\left(8\sin(2\theta) - \sin(4\theta)\right). \tag{14.54}$$

Puis $K_3 = h_3 = 0, g_3 = 0$, et enfin

$$\frac{\partial w_4}{\partial t} + \{w_4, h_0\} = 4\left(K_4 + j^3\left(\tfrac{1}{256} - \tfrac{7}{384}\cos(2\theta) + \tfrac{1}{960}\cos(4\theta) + \tfrac{1}{640}\cos(6\theta)\right)\right), \tag{14.55}$$

que l'on résout en prenant $K_4 = -\frac{1}{128}j^3$. On trouve donc à l'ordre 4

$$K = j - \tfrac{1}{48}j^2 - \tfrac{1}{256}j^3. \tag{14.56}$$

15. Unicité de la forme normale

On démontre, ici, l'unicité de la forme normale, sous certaines hypothèses. Dans un premier temps, on montre l'unicité de la forme normale, lorsque la transformation canonique est une transformation de Deprit, puis on montre l'unicité de la forme normale, que l'on choisisse une transformation de Deprit ou une transformation de Dragt-Finn. La preuve de cette propriété se trouve également sous une autre forme dans le livre de Siegel & Moser ([51]). Démontrons tout d'abord la proposition classique, dont des indications de démonstration sont données dans [41].

Proposition 30. — *Sous les hypothèses suivantes :*

- (i) $h_0 \in E_2$,
- (ii) *le noyau et l'image de* L_{h_0} *sont en somme directe,*
- (iii) *pour tout* $a, b \in \ker L_{h_0}$, *on a* $\{a, b\} = 0$,

il existe une unique forme normale K *et une série génératrice* w *telle que* $K = T_w^{-1}h$.

Pour $h_0 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\omega_l(p_l^2 + q_l^2)$ et les ω_l rationnellement indépendants, on a bien les deux premières hypothèses. Comme le noyau de L_{h_0} est le sous espace vectoriel de E engendré par les produits d'actions, on déduit (iii) de

$$\{I_1^{k_1}\cdots I_n^{k_n}, I_1^{l_1}\cdots I_n^{l_n}\} = I_1^{k_1+l_1}\cdots I_n^{k_n+l_n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{k_i l_j}{I_i I_j}\{I_i, I_j\} = 0. \tag{15.1}$$

Soient u et v deux séries génératrices, telles que $K^u = T_u^{-1}h$ et $K^v = T_v^{-1}h$ soient deux formes normales de h, à un certain ordre r. En posant $T = T_u^{-1}T_v$ on déduit que $K^v = T^{-1}K^u$. En dérivant, on obtient

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial T_v^{-1}}{\partial\varepsilon}T_u + T_v^{-1}\frac{\partial T_u}{\partial\varepsilon} = L(\tfrac{\partial v}{\partial\varepsilon})T_v^{-1}T_u - T_v^{-1}T_uL(\tfrac{\partial u}{\partial\varepsilon}) \tag{15.2}$$

donc

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial\varepsilon} = \left[L(\tfrac{\partial v}{\partial\varepsilon}) - T^{-1}L(\tfrac{\partial u}{\partial\varepsilon})T\right]T^{-1} = L\left[\tfrac{\partial v}{\partial\varepsilon} - T^{-1}\tfrac{\partial u}{\partial\varepsilon}\right]T^{-1}. \tag{15.3}$$

T apparaît comme la transformation de Lie associée à w, où

$$\frac{\partial w}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial\varepsilon} - T^{-1}\frac{\partial u}{\partial\varepsilon}, \tag{15.4}$$

qui transforme la forme normale K^u en la forme normale K^v, au même ordre r. En utilisant (13.38) et $h_0 = K_0^u = K_0^v$, on déduit, pour tout n, l'équation de perturbation associée

$$\{h_0, w_n\} + K_n^v = R_n^u = K_n^u + \sum_{p=1}^{n-1} T_p^{-1}K_{n-p}^u + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n}L(w_p)T_{n-p}^{-1}h_0. \tag{15.5}$$

Prouvons alors, par récurrence, que, pour tout $0 \le n \le r$ et $1 \le i, i+j \le n$,

$$R_n^u = K_n^u = K_n^v, \quad \{h_0, w_n\} = 0 \quad \text{et} \quad T_i^{-1}K_j^u = 0. \tag{15.6}$$

Étant donné un ordre r, (15.5) devient, pour $n = 1$,

$$\{h_0, w_1\} + K_1^v = K_1^u. \tag{15.7}$$

D'après l'hypothèse (ii), comme K_1^v et $K_1^u \in \ker L_{h_0}$, on a

$$\{h_0, w_1\} = 0 \quad \text{et} \quad K_1^u = K_1^v. \tag{15.8}$$

Supposons que l'on ait (15.6), pour $1 \le i < n \le r$, alors (15.5) devient

$$\begin{aligned}
\{h_0, w_n\} + K_n^v &= K_n^u + \sum_{p=1}^{n-1} T_p^{-1}K_{n-p}^u + \sum_{p=1}^{n-1} \tfrac{p}{n}L_{w_p}\underbrace{T_{n-p}^{-1}h_0}_{=0(15.6)} && (15.9)\\
&= K_n^u + \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{p} \tfrac{q}{p}L_{w_q}T_{p-q}^{-1}K_{n-p}^u && (15.10)\\
&= K_n^u + \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{p-1} \tfrac{q}{p}L_{w_q}\underbrace{T_{p-q}^{-1}K_{n-p}^u}_{=0(15.6)} + \sum_{p=1}^{n-1}\underbrace{L_{w_p}K_{n-p}^u}_{=0(iii)} && (15.11)\\
&= K_n^u && (15.12)
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$K_n^v = K_n^u \quad \text{et} \quad \{h_0, w_n\} = 0 \tag{15.13}$$

et, pour $1 \leq i, i+j = n$, on a, d'après (15.6),

$$T_i^{-1} K_j^u = \sum_{p=1}^{i-1} \tfrac{p}{i} \underbrace{T_{i-p}^{-1} K_j^u}_{=0(15.6)} + \underbrace{L_{w_p} K_j^u}_{=0(iii)} = 0. \tag{15.14}$$

On en déduit alors que, pour tout $n \leq r$,

$$\{h_0, w_n\} = 0 \quad \text{et} \quad K_n^u = K_n^v. \tag{15.15}$$

On a alors $K^u = K^v$, ce qui prouve l'unicité de la forme normale. Cependant, la transformation T n'est pas nécessairement l'identité, car il suffit que $w \in \ker L_{h_0}$.

15.1. Équivalence des méthodes

On déduit alors l' équivalence des méthodes de Deprit et de Dragt-Finn, ainsi que l'unicité de la forme normale.

Proposition 31. — *Sous les mêmes conditions que pour la proposition 30, les deux formes normales K^w et K^g obtenues par le méthode de Deprit et par la méthode de Dragt-Finn sont égales.*

Posons M_g, la transformation de Dragt-Finn correspondant à la forme normale K^g, c'est-à-dire que l'on a $K^g = M_g^{-1} h$. D'après la proposition (15), il existe une série w' telle que

$$T_{w'}^{-1} = M_g^{-1} \quad \text{donc} \quad K^{w'} = T_{w'}^{-1} h = K^g. \tag{15.16}$$

Par unicité de la forme normale obtenue avec la méthode de Deprit, on en déduit que $K^w = K^g$.

Toute forme normale obtenue par la méthode de Dragt-Finn est l'unique forme normale obtenue par la méthode de Deprit. Elle est, par conséquent, unique. Les deux méthodes produisent donc la même forme normale mais les transformations utilisées ne sont pas nécessairement les mêmes.

°°°

Dans le cas de Hamiltoniens perturbés autonomes, on aura tout avantage à utiliser la méthode de Dragt-Finn, plutôt que la méthode de Deprit, puisqu'elles fournissent les mêmes objets, alors que le coût de la première est moindre.

La résolution de l'équation de perturbation peut se faire, soit en diagonalisant effectivement L_{h_0}, ce qui oblige à effectuer des changements de variables, qui peuvent se révéler très coûteux pour les ordres élevés, soit en résolvant des systèmes linéaires, ce qui peut également être très coûteux, puisque les dimensions des E_n augmentent très vite. En tout état de cause, l'utilisation de l'endomorphisme adjoint n'apporte pas davantage de réponses dans le cas où le noyau et l'image de L_{h_0} ne sont pas en somme directe.

Chapitre IV

Estimations

Dans cette partie, on propose des estimations sur la convergence des séries utilisées avec les méthodes de perturbations. Bien sûr, il est rare que les formes normales convergent, ni même que l'on puisse trouver des intégrales premières convergentes.

Cependant, à la lumière des travaux de Giorgilli ([8, 25]) et de Simò ([52]), on peut déduire de certaines estimations asymptotiques sur le terme général de la forme normale, des résultats, quant à des régions de stabilité au voisinage de points elliptiques.

Les résultats sont de plusieurs types. On donne, tout d'abord, à l'instar de ce qui a été fait avec la transformation de Deprit, des estimations sur le rayon de convergence de la transformée inverse d'une série par la transformation de Dragt-Finn. Les résultats sont à peu près du même ordre que ceux trouvés avec la transformation de Lie.

On utilise ensuite les résultats de [25, 52], pour borner l'écart entre les nouvelles coordonnées et les anciennes. Puis, de la même façon on donne une estimation pour le rayon de convergence du reste de la forme normale, à un ordre r quelconque. Ce résultat est cependant moins bon que celui obtenu pour la méthode de Deprit, sans que je sache exactement si ce phénomène est lié à une plus grande finesse des résultats de Giorgilli *et al.* ou à une propriété de la transformation de Deprit.

Pour finir, puisque ces résultats sont moins bons que ceux obtenus pour la méthode de Deprit, on rappelle la manière dont on déduit des régions de stabilité. Cependant, on verra que les meilleures estimations ne sont pas dues à la transformation de Deprit elle-même, mais à l'existence d'intégrales premières approchées (12.16).

Remarque. — J'ai appris l'existence, très récemment, de l'article de Fassò & Benettin ([18]), qui propose également des estimations pour la même transformation. Mon but, dans ce chapitre, était de comparer mes estimations à celles existantes pour la méthode de Deprit, données par Giorgilli, en utilisant la même norme. Dans l'article cité, les auteurs font justement remarquer qu'ils ne peuvent pas effectuer de comparaisons puisque les normes sont très différentes. Ceci ne les empêche pas de donner, par la suite, des résultats de stabilité, ce que je ne propose pas.

16. Majorations pour les transformations

Dans cette partie, on donne une majoration de la transformée inverse d'une fonction, par la transformation de Deprit ou par celle de Dragt-Finn.

Rappelons, tout d'abord, quelques inégalités utiles. Pour un polynôme homogène de degré n en les variables d'état $z_1, \ldots z_{2n}$,

$$f = \sum_{|i|+|j|=n} f_{i,j} q^i p^j,$$

on note

$$\|f\| = \sum_{|i|+|j|=n} |f_{i,j}|\,, \tag{16.1}$$

la norme L_1. On sait (cf. [22]) que si f_1 et f_2 sont des polynômes de degré d_1 et d_2, on a

$$\|\{f_1, f_2\}\| \leq d_1 d_2 \|f_1\| \|f_2\|\,, \tag{16.2}$$

où

$$L(f_1)f_2 = \{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}$$

est un polynôme de degré $d_1 + d_2 - 2$.

16.1. Majoration pour la transformation de Deprit

On connaît le résultat suivant (cf. [25]) :

THÉORÈME 32 ([25]). — *Soient $w = \sum_{k\geq 1} w_k$ et $f = \sum_{k\geq 1} f_k$ deux fonctions de l'espace des phases. On suppose qu'il existe des constantes a, b, c, d, telles que, pour tout $n \geq 1$,*

— *w_n est de degré $n+2$ et $\|w_n\| \leq a^{n-1} b$,*

— *f_n est de degré n et $\|f_n\| \leq c^{n-1} d$,*

alors, la fonction $F = \sum_{n\geq 0} F_n = T_w^{-1} f$ vérifie, pour tout $n \geq 0$,

$$\|F_n\| \leq (\alpha a + \beta b + \gamma c)^{n-1}\, d, \tag{16.3}$$

où $\alpha = \frac{8}{3}, \beta = 3, \gamma = 1$.

16.2. Majoration pour la transformation de Dragt-Finn

On pose $M_g^{-1} = \cdots e^{L_{g_n}} \cdots e^{L_{g_1}}$, la transformation de Dragt-Finn inverse associée à g. On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 33. — *Soient $g = \sum_{k\geq 1} g_k$ et $f = \sum_{k\geq 1} f_k$ deux fonctions de l'espace des phases. On suppose qu'il existe des constantes a, b, c, d, telles que, pour tout $n \geq 0$,*

— *g_n est de degré $n+2$ et $\|g_n\| \leq a^{n-1} b$,*

— *f_n est de degré n et $\|f_n\| \leq c^{n-1} d$.*

Alors, la fonction $F = \sum_{n\geq 0} F_n = M_g^{-1} f$ vérifie, pour tout $n \geq 0$,

$$\|F_n\| \leq (\alpha a + \beta b + \gamma c)^{n-1}\, d, \tag{16.4}$$

où α, β, γ sont des constantes que l'on déterminera.

On montre tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 34. — *Avec les hypothèses du théorème 33, on a pour* $F = \sum_{n\geq 0} F_n = e^{L_{g_k}} f$

$$\|F_n\| \leq C_{(k)}^{n-1} d \quad où \quad C_{(k)} = \left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{16.5}$$

Démonstration. — D'après (16.2), on a, avec les hypothèses du théorème 33

$$\|L(g_k)^p f_q\| \leq q(q+k)\cdots(q+(p-1)k)(k+2)^p \|g_k\|^p c^{q-1} d, \tag{16.6}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{kp+q=n} \frac{\|L(g_k)^p f_q\|}{p!} &\leq d \sum_{kp+q=n} \frac{q(q+k)\cdots(q+(p-1)k)}{p!}((k+2)\|g_k\|)^p c^{n-kp-1} \\ &= d \sum_{kp+q=n} \frac{(\frac{n}{k}-1)\cdots(\frac{n}{k}-p)}{p!}(k(k+2)\|g_k\|)^p c^{n-kp-1}. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Notons, pour $m \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(m)_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}. \tag{16.8}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|F_n\| &\leq d \sum_{kp+q=n} (\tfrac{n}{k}-1)_p (k(k+2)\|g_k\|)^p c^{n-kp-1} \\ &= d \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]} (\tfrac{n}{k}-1)_p (k(k+2)\|g_k\|)^p c^{n-kp-1}. \end{aligned} \tag{16.9}$$

• Si $n = kr$ est un multiple de k, alors (16.9) devient

$$\begin{aligned} \|F_n\| &\leq d \sum_{kp+q=kr} \frac{(r-1)\cdots(r-p)}{p!}(k(k+2)\|g_k\|)^p c^{k(r-1-p)+(k-1)} \\ &= dc^{k-1}\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{r-1} \\ &= d\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{n-1}{k}} \left[c^{k-1}\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{r-1-\frac{n-1}{k}}\right] \\ &= d\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{n-1}{k}} \left[c^{k-1}\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{1}{k}-1}\right] \\ &\leq d\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{n-1}{k}} c^{k-1}\left(c^k\right)^{(\frac{1}{k}-1)} \\ &= d\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{n-1}{k}} \end{aligned} \tag{16.10}$$

donc

$$\|F_n\| \leq \sum_{kp+q=n} \frac{\|L(g_k)^p f_q\|}{p!} \leq d\left(k(k+2)\|g_k\| + c^k\right)^{\frac{n-1}{k}} = dC_{(k)}^{n-1}. \tag{16.11}$$

• Si $n \neq kr$, on a $[\frac{n}{k}] < \frac{n}{k}$ donc $[\frac{n}{k}] \leq \frac{n-1}{k}$ sinon on aurait $n-1 < k[\frac{n}{k}] < n$ ce qui est impossible. D'autre part, $\frac{n}{k} - 1 \leq \frac{n-1}{k}$ donc $(\frac{n}{k}-1)_p \leq (\frac{n-1}{k})_p$ pour $p \leq \frac{n-1}{k} - 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{kp+q=n} \frac{\|L(g_k)^p f_q\|}{p!} &\leq d \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]} (\tfrac{n}{k}-1)_p (k(k+2)\,\|g_k\|)^p (c^k)^{\frac{n-1}{k}-p} \\
&\leq d \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]} (\tfrac{n-1}{k})_p (k(k+2)\,\|g_k\|)^p (c^k)^{\frac{n-1}{k}-p} \\
&= dc^{n-1} \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]} (\tfrac{n-1}{k})_p (k(k+2)\,\|g_k\|\, c^{-k})^p. \qquad (16.12)
\end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre $[\frac{n}{k}]$, avec reste intégral, on a, pour $\frac{n-1}{k} \geq 1$,

$$(1+x)^{\frac{n-1}{k}} = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]} (\tfrac{n-1}{k})_p x^p + \int_0^1 \frac{(1-t)^{[\frac{n}{k}]}}{[\frac{n}{k}]!} (\tfrac{n-1}{k})_{[\frac{n}{k}]+1} (1+t)^{\frac{n-1}{k}-[\frac{n}{k}]-1} dt. \qquad (16.13)$$

Mais

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{[\frac{n}{k}]}}{[\frac{n}{k}]!} \underbrace{(\tfrac{n-1}{k})_{[\frac{n}{k}]+1}}_{\geq 0} (1+t)^{\frac{n-1}{k}-[\frac{n}{k}]-1} dt \geq 0, \qquad (16.14)$$

dont on déduit, en utilisant (16.12), que

$$\begin{aligned}
\sum_{kp+q=n} \frac{\|L(g_k)^p f_q\|}{p!} &\leq dc^{n-1}(1 + k(k+2)\,\|g_k\|\, c^{-k})^{\frac{n-1}{k}} \qquad (16.15) \\
&= d(k(k+2)\,\|g_k\| + c^k)^{\frac{n-1}{k}}. \qquad (16.16)
\end{aligned}$$

On en déduit donc le lemme 34 et, si $\|g_k\| \leq a^{k-1}b$, que

$$\begin{aligned}
C_{(k)}^k &\leq k(k+2)\,\|g_k\| + c^k \\
&\leq (k+2)\Big((k-1)a^k + b^k\Big) + c^k \\
&= (k+2)(k-1)a^k + (k+2)b^k + c^k. \qquad (16.17)
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

Posons $F^0 = f, \ldots, F^k = e^{L_{g_k}} F^{k-1}$, et démontrons le lemme suivant :

LEMME 35. — *Pour tout k, on peut écrire*

$$\left\| F_n^k \right\| \leq C_k^{n-1} d \quad où \quad C_k^k \leq a_k^k a^k + b_k^k b^k + c_k^k c^k. \qquad (16.18)$$

Démonstration. — Pour $k = 1$, on a $C_1 = 3b + c$. On peut donc écrire (16.18) avec

$$a_1 = 0, b_1 = 3, c_1 = 1. \qquad (16.19)$$

D'après (16.17), et en supposant (16.18) pour $k-1$, on a

$$C_k^k \leq (k+2)(k-1)a^k + (k+2)b^k + \left(a_{k-1}^{k-1}a^{k-1} + b_{k-1}^{k-1}b^{k-1} + c_{k-1}^{k-1}c^{k-1}\right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (16.20)$$

Mais la fonction $k \mapsto \left(\frac{x^k+y^k+z^k}{3}\right)^{\frac{1}{k}}$ est croissante (cf. [47]), ce qui implique qu'on a

$$\begin{aligned} C_k^k &\leq (k+2)(k-1)a^k + (k+2)b^k + 3^{\frac{1}{k-1}}\left(a_{k-1}^k a^k + b_{k-1}^k b^k + c_{k-1}^k c^k\right) && (16.21)\\ &\leq a_k^k a^k + b_k^k b^k + c_k^k c^k && (16.22)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_k^k &= (k-1)(k+2) + 3^{\frac{1}{k-1}} a_{k-1}^k \\ b_k^k &= k+2+3^{\frac{1}{k-1}} b_{k-1}^k \\ c_k^k &= 3^{\frac{1}{k-1}} c_{k-1}^k. \end{cases} \quad (16.23)$$

Pour k=2, on a

$$C_2^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + (3b+c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4(3b^2+c^2) = 4a^2 + 16b^2 + 4c^2, \quad (16.24)$$

et on peut donc prendre

$$a_2 = 2, b_2 = 4, c_2 = 2, \quad (16.25)$$

qui est une meilleure borne que (16.23).

⁂

On conclut la démonstration par le lemme

LEMME 36. — *a_k, b_k, c_k sont bornés par des constantes α, β, γ.*

Démonstration. — Pour la dernière équation (16.23) on obtient

$$c_k = c_1 3^{\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}+\cdots+1-\frac{1}{2}} = 3^{1-\frac{1}{k}}. \quad (16.26)$$

Pour les autres équations, posons, pour tout p,

$$(p-1)(p+2) = \alpha_p 3^{\frac{1}{p-1}} a_{p-1}^p \quad \text{et} \quad (p+2) = \beta_p 3^{\frac{1}{p-1}} b_{p-1}^p, \quad (16.27)$$

donc, avec (16.23),

$$a_k^k = (1+\alpha_k)3^{\frac{1}{k-1}} a_{k-1}^k \quad \text{et} \quad b_k^k = (1+\beta_k)3^{\frac{1}{k-1}} b_{k-1}^k. \quad (16.28)$$

On déduit que

$$\begin{cases} a_k &= a_{k-1}(1+\alpha_k)^{\frac{1}{k}} 3^{\frac{1}{k(k-1)}} \\ b_k &= b_{k-1}(1+\beta_k)^{\frac{1}{k}} 3^{\frac{1}{k(k-1)}}, \end{cases} \quad (16.29)$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_k & = & a_2 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \prod_{p=3}^k (1+\alpha_p)^{\frac{1}{p}} & \geq & a_2\ 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \\ b_k & = & b_2 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}} \prod_{p=3}^k (1+\beta_p)^{\frac{1}{p}} & \geq & b_2\ 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k}}, \end{array}\right. \tag{16.30}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \alpha_k & = & \dfrac{(k-1)(k+2)}{3^{\frac{1}{k-1}} a_{k-1}^k} & \leq & \dfrac{(k-1)(k+2)}{3^{\frac{1}{k-1}} a_2^k 3^{\frac{k}{2}-\frac{k}{k-1}}} & = & 3\dfrac{(k-1)(k+2)}{\left(a_2\sqrt{3}\right)^k} \\ \beta_k & = & \dfrac{(k+2)}{3^{\frac{1}{k-1}} b_{k-1}^k} & \leq & \dfrac{(k+2)}{3^{\frac{1}{k-1}} b_2^k 3^{\frac{k}{2}-\frac{k}{k-1}}} & = & 3\dfrac{(k+2)}{\left(b_2\sqrt{3}\right)^k}. \end{array}\right. \tag{16.31}$$

Mais

$$a_2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} > 1 \quad \text{et} \quad b_2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} > 1 \tag{16.32}$$

et, pour $k \geq 3$,

$$\alpha_k \leq 3\frac{(k-1)(k+2)}{\left(a_2\sqrt{3}\right)^k} \quad \text{et} \quad \beta_k \leq 3\frac{(k+2)}{\left(b_2\sqrt{3}\right)^k} \tag{16.33}$$

qui sont les termes principaux de séries convergentes, ce qui prouve que

$$\prod_{p\geq 2}(1+\alpha_p)^{\frac{1}{p}} \leq \prod_{p\geq 2}(1+\alpha_p) \quad \text{et} \quad \prod_{p\geq 2}(1+\beta_p)^{\frac{1}{p}} \leq \prod_{p\geq 2}(1+\beta_p) \tag{16.34}$$

sont convergents et bornés. En utilisant (16.30), on déduit que a_k et b_k sont convergents et bornés par α et β. En utilisant la décroissance des normes L_p, on trouve

$$C_k \leq \left(\alpha^k a^k + \beta^k b^k + \gamma^k c^k\right)^{\frac{1}{k}} \leq \alpha a + \beta b + \gamma c. \tag{16.35}$$

On peut trouver des majorations explicites pour α et β, en utilisant les majorations habituelles sur les séries entières, mais il est clair que les majorations peuvent être améliorées si on connaît les valeurs respectives de a, b, c.

16.3. Majoration des restes

Pour $r \in \mathbb{N}$, on désigne le reste à l'ordre r de $F = M_g^{-1} f$ (resp. $F = T_w^{-1} f$) par

$$\mathcal{R}^{(r)} = \sum_{p\geq r+1} F_p. \tag{16.36}$$

On note, pour la transformation de Dragt-Finn comme pour la transformation de Deprit,

$$R^* = (\alpha a + \beta b + \gamma c)^{-1}, \tag{16.37}$$

le rayon de convergence de F. On montre le résultat suivant :

Théorème 37 ([25]). — *Avec les hypothèses des théorèmes (32) et (33), F est convergente dans la boule $D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n}, \|(x,y)\|_2 \leq R\right\}$ où $R < R^*$ et*

$$|F|_{D_R} \leq \left(1 - \frac{R}{R^*}\right)^{-1} Rd, \left|R^{(r)}\right|_{D_R} \leq \left(\frac{R}{R^*}\right)^r \left(1 - \frac{R}{R^*}\right)^{-1} Rd, \tag{16.38}$$

Démonstration. — De $\|F_n\| \leq R^{*1-n} d$, on déduit que $|F_n|_{D_R} \leq dR\left(\frac{R}{R^*}\right)^{n-1}$. On déduit alors que

$$|F|_{D_R} \leq dR \sum_{n\geq 0} \left(\tfrac{R}{R^*}\right)^n = dR\frac{1}{1-\frac{R}{R^*}} = \left(1 - \tfrac{R}{R^*}\right)^{-1} Rd \tag{16.39}$$

et, de la même façon,

$$\left|\mathcal{R}^{(r)}\right|_{D_R} \leq \left(\tfrac{R}{R^*}\right)^r \left(1 - \tfrac{R}{R^*}\right)^{-1} Rd. \tag{16.40}$$

Théorème 38 ([25]). — *Avec les mêmes hypothèses que dans les théorèmes (32) et (33) et R^* défini en (16.37), on a, pour tout $R^* > \rho R > R$, pour tout $(X,Y) \in D_R$ et $(x,y) = M_g^{-1}(X,Y)$ (resp. $(x,y) = T_w^{-1}(X,Y)$)*

$$|(x,y) - (X,Y)|_{D_R} \leq |(X,Y)|_{D_R} \sqrt{2}(\rho-1)^{-1}. \tag{16.41}$$

Démonstration. — Posant Z, une des coordonnées de (X,Y), on a

$$Z - z = \sum_{p\leq 2} Z_p(X,Y) \tag{16.42}$$

où Z_p est un polynôme homogène de degré p. En utilisant la norme L_1, on a

$$\|Z_p\| \leq (\alpha a + \beta b)^{p-1} \tag{16.43}$$

puisqu'on peut prendre $c = 0$ et $d = 1$ pour $f(X,Y) = (X,Y)$.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
|z - Z|_{D_R} &\leq \sum_{p\geq 2} \|Z_p\| \, |(X,Y)|_{D_R}^p && (16.44)\\
&\leq |(X,Y)|_{D_R} \sum_{p\geq 1} (\alpha a + \beta b)^p \, |(X,Y)|_{D_R}^p && (16.45)\\
&= |(X,Y)|_{D_R} \frac{|(X,Y)|_{D_R} (\alpha a + \beta b)}{1 - (\alpha a + \beta b)\,|(X,Y)|_{D_R}} && (16.46)\\
&\leq |(X,Y)|_{D_R} \rho^{-1} \frac{1}{1-\rho^{-1}} && (16.47)\\
&= |(X,Y)|_{D_R} (\rho - 1)^{-1}. && (16.48)
\end{aligned}$$

Comme $|(X,Y)| \leq \sqrt{2} \sup(|X|, |Y|)$, on en déduit la propriété énoncée.

17. Majorations pour la forme normale

On donne ici une estimation pour le rayon de convergence de la forme normale à un certain ordre. On pose, pour tout $k \geq 1$,

$$\alpha_k = \min_{0<|k|\leq r} (|k.\omega|) = \min_{\sum_{l=1}^{n}|k_l|\leq r} (|\textstyle\sum_{l=1}^{n} k_l\omega_l|). \tag{17.1}$$

On suppose ici que $h = \sum_{k\geq 0} h_k$ où h_k est de degré $k+2$ et vérifie, pour tout k, $\|h_k\| \leq a^k b$.

17.1. Méthode de Deprit

On construit la forme normale de h par la méthode de Deprit. On pose w, la fonction génératrice de T_w, la transformation de Deprit correspondant à la méthode. On a le résultat suivant [25] :

Lemme 39 ([25]). — *Pour tout $k \leq r$,*

$$\|w_k\| \leq \frac{3ab}{\alpha_k}\left[\frac{12k}{5}a\left(1+\frac{b}{\alpha_r}\right)\right]^{k-1}. \tag{17.2}$$

On en déduit, en appliquant le théorème 32, que

Théorème 40 ([25]). — *Pour $w = \sum_{k=1}^{r} w_k$ et $K = T_w^{-1}h$, la forme normale à l'ordre r, on a*

$$\|K_n\| \leq A^n d, \quad 1 \leq n \quad \textit{où} \quad A = a\left[\left(9+\tfrac{32}{5}r\right)\frac{b}{\alpha_r} + \left(1+\tfrac{32}{5}r\right)\right]. \tag{17.3}$$

Posant $R_r^* = A^{-1}$, on obtient pour la forme normale $T_w^{-1}h = \mathcal{Z}^{(r)} + \mathcal{R}^{(r)}$ à l'ordre r

— *$T_w^{-1}h$ est convergente dans toute boule D_R avec $R < R^*$,*

— *le terme général du reste est borné par $\left\|\mathcal{R}_n^{(r)}\right\| \leq \left(\frac{R}{R_r^*}\right)^n d$ et*

$$\left|\mathcal{R}^{(r)}\right|_{D_R} \leq bR\left(\frac{R}{R^*}\right)^r\left(1-\frac{R}{R^*}\right)^{-1}. \tag{17.4}$$

17.2. Méthode de Dragt-Finn

On construit $K^{(0)} = h$, $K^{(k)} = e^{L_{g_k}}K^{(k-1)}$ pour $k \geq 0$. g_k vérifie $L_{h_0}g_k + K_k^{(k)} = K_k^{(k-1)}$.

Lemme 41. — *Pour tout $k, n \in N$, on a*

$$\left\|K_n^{(k)}\right\| \leq a_k^n b \quad \textit{et} \quad \|g_k\| \leq \frac{a_{k-1}^k b}{\alpha_k}, \tag{17.5}$$

où

$$a_k = 2a\prod_{p=1}^{k}\left(1+\tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17.6}$$

Démonstration. — Définissons a_k, b_k de telle façon qu'on ait, pour tout k et tout n,

$$\left\|K_n^{(k)}\right\| \leq a_k^n b_k. \tag{17.7}$$

De $L_{h_0} g_k + K_k^{(k)} = K_k^{(k-1)}$, on obtient tout d'abord, par projection (cf. [25]), et puisque α_k (cf. 17.1) est la plus petite des valeurs propres de L_{h_0} sur E_k,

$$\left\|K_k^{(k)}\right\| \leq \left\|K_k^{(k-1)}\right\| \quad \text{et} \quad \|g_k\| \leq \tfrac{1}{\alpha_k}\left\|K_k^{(k-1)}\right\|. \tag{17.8}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|K_n^{(k)}\right\| &\leq \sum_{kp+q=n} \frac{1}{p!}\left\|L_{g_k}^p K_q^{(k-1)}\right\| \\
&\leq \sum_{kp+q=n} \frac{(q+2)(q+k+2)\cdots(q+(p-1)k+2)}{p!}(k+2)^p \|g_k\|^p \left\|K_q^{(k-1)}\right\| \\
&\leq \sum_{kp+q=n} \frac{(\frac{n+2}{k}-1)\cdots(\frac{n+2}{k}-p)}{p!}\left(k(k+2)\|g_k\|\right)^p \left\|K_q^{(k-1)}\right\| \\
&\leq a_{k-1}^n b_{k-1} \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]} (\tfrac{n+2}{k}-1)_p \left(\tfrac{k(k+2)b_{k-1}}{\alpha_k}\right)^p.
\end{aligned} \tag{17.9}$$

On doit alors distinguer plusieurs cas.
• Si $k=1$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|K_n^{(1)}\right\| &\leq b\sum_{p=0}^{n} \tbinom{n+1}{p}\left(\tfrac{3ab}{\alpha_1}\right)^p a^{n-p} \\
&= a^n b\left[\left(1+\tfrac{3b}{\alpha_1}\right)^{n+1} - \left(\tfrac{3b}{\alpha_1}\right)^{n+1}\right] \\
&\leq b_1\left(a(n+1)^{\frac{1}{n}}(1+\tfrac{3b}{\alpha_1})\right)^n,
\end{aligned} \tag{17.10}$$

et l'on peut prendre

$$b_1 = b,\, a_1 = a\max_n\left((n+1)^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+\tfrac{3b}{\alpha_1}\right) = 2a\left(1+\tfrac{3b}{\alpha_1}\right). \tag{17.11}$$

• Si $k \geq 2$, on a $\frac{n+2}{k}-1 \leq \frac{n}{k}$ et

$$\begin{aligned}
\left\|K_n^{(k)}\right\| &\leq a_{k-1}^n b_{k-1}\sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]}(\tfrac{n}{k})_p\left(\tfrac{k(k+2)b_{k-1}}{\alpha_k}\right)^p \\
&\leq a_{k-1}^n b_{k-1}\left(1+\tfrac{k(k+2)a_{k-1}^k b_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{\frac{n}{k}}.
\end{aligned} \tag{17.12}$$

Cette inégalité est obtenue en écrivant la formule de Taylor avec reste intégral

$$(1+x)^{\frac{n}{k}} = \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]}(\tfrac{n}{k})_p x^p + \int_0^1 \frac{(1-t)^{[\frac{n}{k}]}}{[\frac{n}{k}]!}\overbrace{(\tfrac{n}{k})_{[\frac{n}{k}]+1}}^{\geq 0}(1+t)^{\frac{n}{k}-[\frac{n}{k}]-1}dt \tag{17.13}$$

$$\geq \sum_{p=0}^{[\frac{n}{k}]}(\tfrac{n}{k})_p x^p. \tag{17.14}$$

On peut prendre alors $b_k = b_{k-1}$ et $a_k = a_{k-1}\left(1+\frac{k(k+2)b_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{\frac{1}{k}}$.

⁂

On en déduit un résultat sur la convergence de la forme normale.

THÉORÈME 42. — *Si $h = \sum_{k\geq 0} h_k$ vérifie, pour tout $k \geq 0$, $\|h_k\| \leq a^k b$, on obtient, avec les notations du lemme 41, pour la forme normale à l'ordre r :*

$$K^{(r)} = \mathcal{Z}^{(r)} + \mathcal{R}^{(r)} = e^{L_{g_r}} \cdots e^{L_{g_1}} h = {M^{(r)}}^{-1} h, \tag{17.15}$$

— *$K^{(r)}$ est convergente dans toute boule D_R avec*

$$R < R_r^* = 2a\left[\prod_{p=1}^{r}\left(1+\frac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{-1}, \tag{17.16}$$

— *le terme général du reste est borné par $\left\|\mathcal{R}_n^{(r)}\right\| \leq R_r^{*n} d$ et l'on a*

$$\left|\mathcal{R}_n^{(r)}\right|_{D_R} \leq bR\left(\frac{R}{R^*}\right)^r\left(1-\frac{R}{R^*}\right)^{-1}. \tag{17.17}$$

La preuve découle du lemme 41 et de majorations classiques sur des série numériques.

⁂

THÉORÈME 43. — *Avec les hypothèses du théorème précédent, soit $f = \sum_{n\geq 1} f_n$ où f_n est un polynôme de degré n et vérifie $\|f_n\| \leq c^{n-1} d$. Posant $\rho = \max(\frac{c}{a}, 1)$, on a*

— *${M^{(r)}}^{-1} f$ est convergente dans le disque $D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n}, \|(x,y)\| \leq R\right\}$ où*

$$R < R_r^* = 2a\left[\prod_{p=1}^{r}\left(\rho^p+\frac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{-1}, \tag{17.18}$$

— *$F^{(r)} = {M^{(r)}}^{-1} f$ est convergente dans D_R et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|F_n^{(r)}\right\| \leq c_r^{n-1} d$, où*

$$c_r = 2a\prod_{p=1}^{r}\left(\rho^p+\frac{p(p+2)b}{\alpha_p},\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{17.19}$$

—

$$\left|F^{(r)}\right|_{D_R} \leq \left(1-\frac{R}{R^*}\right)^{-1} Rd, \quad \left|\mathcal{R}^{(r)}\right|_{D_R} \leq \left(\frac{R}{R^*}\right)^r\left(1-\frac{R}{R^*}\right)^{-1} Rd. \tag{17.20}$$

Démonstration. — De même que pour le théorème précédent, définissons

$$F^{(0)} = f, F^{(k)} = e^{L_{g_k}} F^{(k-1)}. \tag{17.21}$$

En vertu du lemme 34, on peut poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|F_n^{(1)}\right\| \leq c_1^{n-1} d$ où

$$c_1 \leq 3\|g_1\| + \rho a = a\left(\rho+\frac{3b}{\alpha_1}\right). \tag{17.22}$$

Supposons maintenant que $\left\|F_n^{(k-1)}\right\| \leq c_{k-1}^n d$ avec

$$c_{k-1} \leq 2a \prod_{p=1}^{k-1} \left(\rho^k + \tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17.23}$$

On déduit alors, que

$$\begin{aligned} c_k^k &\leq \left(k(k+2)\left\|g_k\right\| + c_{k-1}^k\right) && (17.24)\\ &\leq 2^k a^k \left(\tfrac{k(k+2)b}{\alpha_k}\left[\prod_{p=1}^{k-1}\left(1+\tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^k + \rho^k\left[\prod_{p=1}^{k-1}\left(\rho^p+\tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^k\right) && (17.25)\\ &\leq 2^k a^k \left[\prod_{p=1}^{k-1}\left(\rho^p+\tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^k \left(\rho^k + \tfrac{k(k+2)b}{\alpha_k}\right) && (17.26)\\ &= 2^k a^k \left[\prod_{p=1}^{k}\left(\rho^p+\tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^k, && (17.27)\end{aligned}$$

puis par récurrence, que pour tout $k, n \geq 1$, on a

$$\left\|F_n^{(k)}\right\| \leq c_k^{n-1} d \quad \text{où} \quad c_k = 2a \prod_{p=1}^{k}\left(\rho^p + \tfrac{p(p+2)b}{\alpha_p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{17.28}$$

Les autres majorations découlent de manipulations élémentaires sur les séries numériques.

17.3. Comparaisons

Comme les α_r tendent vers 0, il est fort peu probable que les formes normales convergent. Prenons par exemple, l'approximation diophantienne classique pour α_r,

$$\alpha_r = \frac{k}{r^{m-1}} \tag{17.29}$$

où k et $m-1$ sont des constantes positives. De (17.2), on déduit pour la transformation de Deprit, que

$$R_r^{*-1} = 9 + \tfrac{32}{5} r \tfrac{b}{k} r^{m-1} + 1 + \tfrac{32}{5} r \simeq \lambda_1 r^m,$$

alors que, pour la transformation de Dragt-Finn, la majoration (17.18) donne

$$\begin{aligned} R_r^{*-1} &= 2a \textstyle\prod_{p=1}^r \left(1 + kp(p+2)p^{m-1}\right)^{1/p}\\ &\simeq \lambda_2 e^{\sum_{p=1}^r \frac{m+1}{p}\log p}\\ &\simeq \lambda_2 e^{\frac{m+1}{2}\log^2 r}\\ &\simeq \lambda_2 r^{\frac{m+1}{2}\log r}. \end{aligned} \tag{17.30}$$

Par conséquent, la majoration pour la transformation de Deprit proposée par Giorgilli est meilleure dès que

$$\log r \geq 2\frac{m}{m+1}. \tag{17.31}$$

18. Estimation de la diffusion

Par une application du théorème des accroissements finis, on essaie de trouver une boule centrée au point d'équilibre, telle que, pour un temps le plus long possible, on puisse prédire que les trajectoires issues de cette boule ne s'en éloignent pas trop. Les bornes données ici ne sont pas les meilleures possibles mais donnent une indication de ce qu'il est possible d'espérer. En fait, il semble qu'il soit nécessaire d'adapter à chaque type de problème une majoration *ad hoc*.

La technique (cf. [25]) consiste tout d'abord à borner la dérivée des actions, qui sont les distances à l'origine. On cherche alors un ordre de perturbation optimal r_{opt} pour la troncature.

Soit $h = \sum_{n\geq 0} h_n$ avec $h_0 = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{\omega_l}{2}(p_l^2 + q_l^2)$. On suppose également que les ω_l sont rationnellement indépendantes. Notons $T^{(r)}$, la transformation de Dragt-Finn ou de Deprit qui a permis de construire la forme normale à l'ordre r, $K^{(r)} = \mathcal{Z}^{(r)} + \mathcal{R}^{(r)}$, ainsi que $(Q^{(r)}, P^{(r)}) = T^{(r)}(q,p)$. Posons alors $I_l^{(r)} = \dfrac{1}{2}({P^{(r)}}^2 + {Q^{(r)}}^2)$, on obtient le théorème suivant où R_r^* désigne le rayon de convergence de $\mathcal{R}^{(r)}$:

Théorème 44 ([25]). — *Pour $R < R_r^*$, on a la majoration*

$$\left|\dot{I}^{(r)}\right|_{D_R} \leq \tfrac{d}{c} R\left(\frac{R}{R_r^*}\right)\left(R + 1 - r\frac{R}{R_r^*}\right)\left(1 - \frac{R}{R_r^*}\right)^{-2}. \tag{18.1}$$

La majoration est obtenue en utilisant les résultats précédents et en remarquant que

$$\dot{I}_l^{(r)} = \left\{I_l^{(r)}, \mathcal{R}^{(r)}\right\}. \tag{18.2}$$

⋆⋆⋆

L'étape suivante consiste à trouver un ordre r_{opt} optimal pour que la majoration de $\dot{I}^{(r)}$ soit minimale. On déduit alors que, pour un temps $t < T$, déterminé par les constantes précédemment introduites, on a pour un certain $\rho > 1$:

Toute particule se trouvant à $t = 0$ dans la boule D_R, se trouve dans la boule $D_{\rho R}$ tant que $t < T$, T dépendant alors des bornes que l'on s'est fixé pour h, de R, des α_i, de ρ et, surtout avec cette méthode, de la transformation employée, puisque T dépend des majorations sur le reste.

Comme l'estimation pour la méthode de Dragt-Finn est *a priori* moins bonne que celle obtenue par [25] ou [52] pour la méthode de Deprit, on n'expose pas ici les majorations obtenues dans le détail.

Ces majorations ne dépendent que des majorations obtenues de façon théorique, et la transformation n'intervient que pour calculer des majorations intermédiaires sur le reste de la forme normale.

On peut alors se poser la question de savoir quelle est l'utilité de calculer effectivement les formes normales ou les transformations. Il se trouve justement que, dans un article postérieur à [25], les résultats obtenus en utilisant des informations issues du calcul des premiers termes de la transformation de Lie, indépendamment du fait que ce soit une transformation de Deprit ou une transformation de Dragt-Finn, sont nettement meilleurs.

Les résultats s'appuient essentiellement sur l'existence d'intégrales premières approchées (12.16) du système hamiltonien, dont la construction est assurée par la méthode de Deprit ou la méthode de Dragt-Finn.

Supposons donc donné un Hamiltonien h. L'existence, à tout ordre r, d'une fonction $\xi_l^{(r)} = \sum_{p \geq 0} \xi_{l,p}^{(r)}$ vérifiant, pour tout $1 \leq l \leq n$,

$$\left\{\xi_l^{(r)}, h\right\} = \ = \sum_{n \geq r+1} \varepsilon^n \sum_{p+q=n} \left\{\xi_{l,p}^{(r)}, h_q\right\}, \tag{18.3}$$

est assurée par (12.16). Considérons alors

$$\Phi_l^{(r)} = \sum_{p=0}^{r} \xi_l^{(r)} = \sum_{p=0}^{r} \Phi_l^{(r)}. \tag{18.4}$$

Les premiers termes vérifient, pour $0 \leq n \leq r$,

$$\Phi_{l,0}^{(r)} = I_l, \sum_{p=0}^{n} \left\{\Phi_{l,p}^{(r)}, h_{n-p}\right\} = \left\{\Phi_{l,n}^{(r)}, h_0\right\} + \sum_{p=1}^{n} \left\{\xi_{l,p}^{(r)}, h_{n-p}\right\} = 0. \tag{18.5}$$

On a alors

$$\dot{\Phi}_l^{(r)} = \left\{\Phi_l^{(r)}, h\right\} \ = \sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} \left\{\Phi_{l,p}^{(r)}, h_q\right\} = \sum_{p=0}^{r} \sum_{n \geq r} \varepsilon^n \left\{\Phi_{l,p}^{(r)}, h_{n-p}\right\}. \tag{18.6}$$

L'idée, dans [8], est d'utiliser (18.6), ainsi que les premiers termes de $\Phi_l^{(r)}$, pour borner I_l au cours du temps. Dans [8], on écrit

$$|I_l(t) - I_l(0)| \leq \left|I_l(t) - \Phi_l^{(r)}(t)\right| + \left|I_l(0) - \Phi_l^{(r)}(0)\right| + \left|\Phi_l^{(r)}(t) - \Phi_l^{(r)}(0)\right|. \tag{18.7}$$

Les deux premiers termes sont de la forme $\left|\sum_{p=1}^{r} \Phi_{l,p}^{(r)}\right|$, dont on connaît des estimations, soit parce qu'on les a effectivement calculés, soit qu'on en a calculé une partie $\Phi_{l,0}^{(r)} \cdots \Phi_{l,\tilde{r}}^{(r)}$ et qu'on possède des estimations de $\|h_k\|$. Dans ce cas, on déduit des estimations pour les $\Phi_{l,p}^{(r)}$, en utilisant (18.5). Le dernier terme est majoré, à l'aide du théorème des accroissements finis, et d'une majoration déduite de (18.6).

La démonstration est assez technique, mais il apparaît qu'elle apporte de bien meilleures bornes que la méthode consistant à donner une estimation du reste. Dans [8], il est fait une comparaison de l'estimation de la région de stabilité avec les résultats de Simò ([52]), et il semble que la dernière technique proposée donne de meilleurs résultats, ce qui montre que la connaissance des premiers termes de la forme normale et de la transformation associée peuvent apporter d'importantes améliorations.

18.1. Exemple

On rappelle, ici, une application des résultats précédents à l'étude du Hamiltonien du problème restreint des trois corps, au voisinage du point $\mathcal{L}_4$ de Lagrange (cf. [52, 25]).

On considère le système suivant : 2 corps de grandes masses relatives μ et $1-\mu$, en rotation uniforme autour de leur barycentre. La distance entre ces corps est d'une unité, la période de rotation est de 2π. On étudie un troisième corps soumis à l'attraction de ces deux corps primaires. Sa masse m est considérée comme négligeable pour influencer sur le mouvement des deux corps primaires. On se place dans le repère tournant, c'est-à-dire que les positions du corps de masse μ et $1-\mu$ sont respectivement $(1-\mu, 0, 0)$ et $(\mu, 0, 0)$. Le troisième corps admet pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \tag{18.8}$$

L'énergie du système T est donnée par

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \tfrac{1}{2}\left((\tfrac{d}{dt}(x\cos(t) - y\sin(t)))^2 + (\tfrac{d}{dt}(x\sin(t) + y\cos(t)))^2 + \dot{z}^2 \right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(((\dot{x} - y)\cos(t) - (\dot{y} + x)\sin(t))^2 + ((\dot{x} - y)\sin(t) + (\dot{y} + x)\cos(t))^2 + \dot{z}^2 \right) \\ &= \tfrac{1}{2}(((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} - x)^2 + \dot{z}^2), \end{aligned} \tag{18.9}$$

et l'énergie potentielle par

$$U = -\tfrac{\mu}{d_1} - \tfrac{1-\mu}{d_2}, \tag{18.10}$$

où d_1 et d_2 sont les distances aux corps primaires :

$$d_1^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad d_2^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2. \tag{18.11}$$

Le système hamiltonien est donné par les variables canoniques

$$p_x = (\dot{x} - y), p_y = (\dot{y} + x), p_z = \dot{z}, \tag{18.12}$$

et le Hamiltonien

$$\begin{aligned} h &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - T + U && (18.13) \\ &= p_x(p_x + y) + p_y(p_y - x) - \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U && (18.14) \\ &= \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + U. && (18.15) \end{aligned}$$

Les points d'équilibre du système vérifient

$$\dot{x} = p_x + y = \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \ \dot{y} = p_y - x = \frac{\partial h}{\partial y}, \ \dot{z} = p_z = \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \tag{18.16}$$

qui admet pour solution générale

$$z = p_z = 0, \ p_x + y = -p_y + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \ p_y - x = p_x + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{18.17}$$

soit,

$$z = p_z = 0, \ x + \frac{\partial U}{\partial x} = y + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \ p_x + p_y = -y + \frac{\partial U}{\partial x}, \ p_x - p_y = -x - \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{18.18}$$

Posons

$$V = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + U = \tfrac{1}{2}(\mu d_1^2 + (1 - \mu)d_2^2 - \mu(1 - \mu)) + U. \tag{18.19}$$

Si $y = 0$, on trouve trois solutions qui sont les trois points de Lagrange $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ alignés sur la droite joignant les corps primaires. Si $y \neq 0$ alors $(x, y, z) \mapsto (d_1, d_2, z)$ est un difféomorphisme et $V = V(d_1, d_2, z)$ est différentiable. $DV = 0$ s'écrit

$$\mu d_1 - \frac{\mu}{d_1^2} = 0,\ (1-\mu) d_2 - \frac{1-\mu}{d_2^2} = 0,\ z = 0, \tag{18.20}$$

c'est-à-dire que $d_1 = d_2 = 1$. On trouve les deux points de Lagrange $\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ qui forment un triangle équilatéral avec les corps primaires.

Après changement d'origine au point $\mathcal{L}_4$, on trouve comme nouveau Hamiltonien

$$h = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + y p_x - x p_y - (\mu - \tfrac{1}{2}) - y\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\mu}{r_1} - \tfrac{1-\mu}{r_2}, \tag{18.21}$$

où

$$r_1^2 = 1 - x + \sqrt{3}y + x^2 + y^2 + z^2, r_2^2 = 1 + x + \sqrt{3}y + x^2 + y^2 + z^2. \tag{18.22}$$

Posant $a = -3(1-2\mu)\frac{\sqrt{3}}{4}$, on peut écrire $h = \sum_{n \geq 0} h_n$ avec

$$\begin{aligned} h_0 &= \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + y p_x - x p_y + \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{5}{8}y^2 - axy + z^2 && (18.23) \\ h_n &= \mu r^n P_n(\tfrac{-x-\sqrt{3}y}{2r}) + (1-\mu) r^n P_n(\tfrac{x-\sqrt{3}y}{2r}), \quad n \geq 1, && (18.24) \end{aligned}$$

où les P_k sont les polynômes de Legendre de degré k.

L'opérateur hamiltonien L_{h_0} admet, comme polynôme caractéristique,

$$(\lambda^4 + \lambda^2 + \tfrac{27}{16} - a^2)(\lambda^2 + 1) = 0. \tag{18.25}$$

Une paire de valeurs propres correspond à $\pm i$ pour le plan $(0, z, p_z)$ et les autres sont imaginaires pures distinctes lorsque $\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}$, c'est-à-dire lorsque $0 < \mu < \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{69}}{9})$. Le point $\mathcal{L}_4$ apparaît alors comme un point d'équilibre elliptique du système.

On peut alors traiter ce Hamiltonien par les méthodes de perturbations, éventuellement en diagonalisant L_{h_0} (les ω_l sont de signes opposés) (cf. [25, 52, 41]).

Le calcul de la forme normale, en gardant les masses μ et $1-\mu$ comme paramètres, s'avère trop gros pour être mené à bien à des ordres élevés par les algorithmes que j'ai implantés.

Les formes normales ont néanmoins été calculées pour des petits ordres (cf. [41]). À l'ordre 2, dans les coordonnées angle-action :

$$\begin{aligned} h_0 &= \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 && (18.26) \\ h_2 &= \tfrac{1}{2}(A I_1^2 + 2B I_1 I_2 + C I_2^2) && (18.27) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{72}\omega_2^2 \frac{(81 - 696\omega_1^2 + 124\omega_1^4)}{(1-2\omega_1^2)(1-5\omega_1^2)},\ C(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_2, \omega_1), && (18.28) \\ B &= -\tfrac{1}{6}\frac{\omega_1\omega_2(43 + 64\omega_1^2\omega_2^2)}{(1-2\omega_1^2)(1-5\omega_1^2)(1-2\omega_2^2)(1-5\omega_2^2)}, && (18.29) \end{aligned}$$

L'étude a été néanmoins menée pour des valeurs numériques correspondant aux corps primaires Soleil et Jupiter dans [8, 25, 52]. Les formes normales ont été calculées jusqu'au degré 30 ce qui a permis de définir une zone de stabilité non négligeable pour une période proche de l'âge de l'univers (10^{10} périodes de rotation de Jupiter autour du soleil). Dans [25], en utilisant des bornes théoriques à partir des estimations du Hamiltonien h, on trouve une zone de stabilité de quelques kilomètres à partir de laquelle les particules ne s'éloignent que de 5 pour mille pour une période de l'ordre de celle de l'âge de l'univers. Dans [52] ou [8], on trouve une zone de stabilité de l'ordre de quelques milliers de kilomètres, pour la même période, en utilisant des bornes effectives sur la forme normale calculée à un ordre élevé.

Les estimations, données dans cette partie, pour la méthode de Dragt-Finn, n'améliorent pas, en elles-même, les résultats de stabilité, que l'on pourrait déduire, par simple estimation des intégrales premières tronquées, en utilisant les estimations effectuées sur la transformation de Lie par Giorgilli *et al.* . Sans doute, l'utilisation de propriétés combinatoires sur les partitions permettrait d'améliorer les estimations pour la transformation de Dragt-Finn, mais seraient-elles meilleures que celles obtenues directement à partir des intégrales premières ?

La connaissance des premiers termes de celles-ci et l'utilisation des formules récurrentes liant les termes successifs permettent d'améliorer considérablement les estimations asymptotiques qui fournissent des informations sur la stabilité du système. Le calcul effectif des formes normales et des intégrales premières tronquées est un des outils essentiels qui fournit des informations de stabilité et la méthode de Dragt-Finn est certainement un moyen efficace pour y parvenir.

Chapitre V

Intégrateurs symplectiques

On est souvent conduit à calculer l'évolution au cours du temps de systèmes hamiltoniens. En mécanique céleste, on utilise des méthodes d'intégrations multi-pas à des ordres assez élevés. L'inconvénient de telles méthodes est que l'erreur sur les positions croît de façon quadratique en temps.

Les intégrateurs symplectiques sont des méthodes numériques pour calculer à très long terme, l'évolution au cours du temps d'un système hamiltonien. À chaque pas, la transformation est symplectique ce qui a l'avantage de conserver une énergie proche de l'énergie du système. Par contre, un désavantage est qu'ils sont, en principe, d'un coût beaucoup plus élevé, que les intégrateurs multi-pas du même ordre.

On peut considérer les intégrateurs symplectiques comme des applications de flots hamiltoniens perturbés par rapport au Hamiltonien original. On peut alors représenter ces intégrateurs soit comme des transformations de Deprit, soit comme des exponentielles, soit encore comme des transformations de Dragt-Finn.

La construction que nous proposons ici, repose principalement sur la possibilité de générer les identités de type exponentielle, en utilisant les algorithmes de la première partie.

Ici, nous reprenons les idées générales de construction, inspirées des travaux de Forest & Ruth [20] ainsi que de ceux de Yoshida [60, 61]. Nous représentons les intégrateurs symplectiques tantôt par des transformations de Lie, ce qui a l'avantage d'éviter le calcul d'identités exponentielles, tantôt par des exponentielles, qui peuvent posséder des propriétés de symétries. Nous montrons tout d'abord la stricte équivalence de ces représentations, c'est-à-dire que les ensembles des solutions obtenues coïncident d'un point de vue algébrique. Nous donnons, ensuite, une liste exhaustive des intégrateurs symplectiques pour les petits ordres. Ceux-ci sont obtenus en cherchant les solutions d'un système d'équations polynomiales, en utilisant les outils algébriques, telles que les bases standard. Certaines des solutions étaient jusqu'à présent inconnues. Ailleurs, nous montrons que la méthode proposée par Yoshida [61] fournit toutes les solutions possibles.

Dans le cas où le Hamiltonien s'écrit comme la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle, nous diminuons le nombre de termes nécessaires à la fabrication de tels intégrateurs. Dans le cas où le Hamiltonien est la somme de trois termes, nous donnons une liste exhaustive des intégrateurs d'ordre 2 et 4.

L'objet de cette partie n'est pas de comparer les mérites respectifs des divers intégrateurs utilisés pour effectuer des intégrations à très long terme, mais de donner des moyens de construction d'intégrateurs symplectiques à des ordres les plus élevés possibles.

19. Méthodes générales de construction

Considérons un système hamiltonien, donné par $h = A + B$, dont on cherche à calculer l'évolution au cours du temps, $S_h(t)$. $S_h(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} = -S_h(t) L_h. \tag{19.1}$$

Si A et B sont autonomes, on a

$$S_h(t) = e^{-tL_h} = e^{-tL_A - tL_B}, \tag{19.2}$$

sinon, $S_h(t)$ est une transformation de Lie

$$S_h(t) = T_{\tilde{h}(t)}, \quad \tfrac{d\tilde{h}(t)}{dt} = h, \tag{19.3}$$

laquelle peut s'écrire comme une exponentielle (cf. [42]).

Lorsque S_h ne se calcule pas facilement, il peut être judicieux de l'approximer par un produit de $S_A(t)$ et $S_B(t)$ lorsque ceux-ci sont plus simples.

Si on considère la méthode d'intégration classique d'Euler, on obtient, pour un pas τ,

$$p(t+\tau) = p(t) - \tau \frac{\partial H}{\partial q}, \quad q(t+\tau) = q(t) + \tau \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{19.4}$$

En général, cette transformation n'est pas symplectique, comme, par exemple, pour $h = \dfrac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$ où (19.4) devient

$$p(t+\tau) = p(t) - \omega\tau q(t), \quad q(t+\tau) = q(t) + \omega\tau p(t), \tag{19.5}$$

dont le déterminant vaut $1 + \omega^2\tau^2$. A chaque pas, la valeur de l'énergie totale ou du Hamiltonien h est multipliée par $1 + \omega^2\tau^2$.

Par contre, le produit des deux transformations symplectiques

$$\left\{ \begin{array}{lll} p & \mapsto & p - \tau \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ q & \mapsto & q \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lll} p & \mapsto & p \\ q & \mapsto & q + \tau \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{array} \right., \tag{19.6}$$

est une transformation symplectique. Pour $h = \dfrac{\omega}{2}(p^2 + q^2)$ on obtient

$$\begin{pmatrix} q(t+\tau) \\ p(t+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2\tau^2 & \omega\tau \\ -\omega\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix}. \tag{19.7}$$

Dans ce cas, la transformation obtenue est le produit

$$T(\tau) = e^{-\tau L_K} = e^{-\frac{\omega}{2}\tau L_{q^2}} e^{-\frac{\omega}{2}\tau L_{p^2}} \tag{19.8}$$

où, d'après la formule Baker-Campbell-Hausdorff,

$$K = \tfrac{\omega}{2}(p^2 + q^2) - \tau \tfrac{\omega}{2} pq + \tau^2 \tfrac{\omega}{12}(p^2 + q^2) - \tau^3 \tfrac{\omega}{12} pq + \cdots. \tag{19.9}$$

Remarquons que K est invariant par (19.8), mais n'est pas le Hamiltonien correspondant à la transformation (19.8). Le Hamiltonien correspondant vérifie

$$\frac{d}{dt}T(t) = -L_{W(t)}T(t), \quad \text{i.e.} \quad L_{W(t)} = -T^{-1}(t)\frac{d}{dt}T(t). \tag{19.10}$$

On obtient, en utilisant (6.46),

$$\begin{aligned} W(t) &= \tfrac{\omega}{2}(e^{-\frac{\omega}{2}tL_{q^2}}p^2 + q^2) \\ &= \tfrac{\omega}{2}(q^2 + p^2 - \tfrac{\omega t}{2}\{q^2, p^2\} + \tfrac{\omega^2 t^2}{8}\{q^2, \left\{q^2, p^2\right\}\}) \\ &= \tfrac{\omega}{2}(p^2 + q^2) + 2t\omega pq + t^2\tfrac{\omega^2}{2}q^2. \end{aligned} \tag{19.11}$$

$\star^\star\star$

Le cas typique où les intégrateurs symplectiques démontrent leur efficacité est le cas où

$$h = T(p) + V(q), \tag{19.12}$$

c'est-à-dire lorsque, par exemple, h est la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle découplées. Dans ce cas, puisque

$$\{T(p), p\} = 0, \ \{T(p), q\} = -\frac{\partial T}{\partial p} \quad \text{et} \quad \{V(q), q\} = 0, \ \{V(q), p\} = \frac{\partial V}{\partial p} \tag{19.13}$$

on a

$$\{T, \{T, q\}\} = 0 \quad \text{et} \quad \{V, \{V, p\}\} = 0. \tag{19.14}$$

Lorsque l'on calcule l'évolution au cours du temps des variables d'état, on obtient alors la forme extrêmement simple :

$$S_T(t)(p, q) = e^{-tT(p)}(p, q) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-tL_T)^n}{n!}(p, q) = (p, q + t\frac{\partial V}{\partial p}), \tag{19.15}$$

$$S_V(t)(p, q) = e^{-tV(q)}(p, q) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-tL_V)^n}{n!}(p, q) = (p - t\frac{\partial T}{\partial q}, q). \tag{19.16}$$

L'idée principale est de construire

$$S^{(n)}(t) = S_T(c_1 t)S_V(d_1 t)\cdots S_T(c_n t)S_V(d_n t), \tag{19.17}$$

de telle façon que, pour un entier k fixé, on ait

$$S^{(n)}(t) = S_h(t) + o(t^k). \tag{19.18}$$

Dans ce cas, on obtient $S_h(\tau)$ comme une succession de transformations

$$q^0 = q, \ p^0 = p, \ \ldots, \ p^{i+1} = p^i + \tau t d_i\frac{\partial T}{\partial p}(q^{i+1}), \ q^{i+1} = q^i + \tau c_i\frac{\partial T}{\partial p}(p^{i+1}), \tag{19.19}$$

et $p_\tau = p^n$, $q_\tau = q^n$ apparaissent après n évaluations de $\dfrac{\partial T}{\partial p}$ et de $\dfrac{\partial V}{\partial q}$.

19.1. Détermination directe d'intégrateurs symplectiques

Soient $h = A + B$ et $S_A(t) = e^{-tL_A}, S_B(t) = e^{-tL_B}$. Pour n et k fixés, on cherche un ensemble minimal $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots d_n$, tel que l'on ait

$$S^{(n)}(t) = S_A(c_1 t) S_B(d_1 t) \cdots S_A(c_n t) S_B(d_n t) = S_h(t) + o(t^k). \tag{19.20}$$

Notons $R = \mathbb{Q}[c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n]$, $\tilde{L}_p(\{A, B\})$, le sous-module de $\tilde{L}(\{A, B\}, R)$ engendré par les éléments de poids p, où $|A|_* = |B|_* = 1$.

On note également par $\tilde{L}_p\{z, A, B\}$, le sous-module de $\tilde{L}(\{z, A, B\}, R)$, engendré par les éléments de poids p, ne contenant qu'une fois la lettre z, où $|z|_* = 0, |A|_* = |B|_* = 1$.

Remarque. — $\tilde{L}_p\{z, A, B\}$ est de dimension 2^p. En effet, si $w \in \{z, A, B\}^*_{p+1}$, avec $z < A < B$, alors si z apparaît une et une seule fois dans w, w est un mot de Lyndon si et seulement si $w = zw_1$ où $w_1 \in \{A, B\}^*_p$, c'est-à-dire qu'il y a exactement 2^p mots de Lyndon de longueur $p + 1$ contenant une et seule fois la lettre z.

⋆⋆⋆

Pour résoudre (19.20), nous devons tout d'abord exprimer des identités exponentielles, en nous plaçant dans une algèbre de Lie libre et en utilisant les méthodes de la première partie. On montre tout d'abord l'égalité algébrique des solutions obtenues en représentant les intégrateurs de diverses manières. On a la propriété suivante :

LEMME 45. — *Considérons les trois problèmes suivants*

1. *Ayant représenté* $S^{(n)}(t)$ *comme* $\exp(-\sum_{p\geq 1} t^p L_{K_p})$, *résoudre dans* $L(\{A, B\})$: $K_1 = A + B, K_2 = \cdots = K_k = 0$,
2. *Ayant représenté* $S^{(n)}(t)$ *comme* $\exp(-tL_{G_1}) \cdots \exp(t^p L_{G_p}) \cdots$, *résoudre dans* $L(\{A, B\})$: $G_1 = A + B, G_2 = \cdots = G_k = 0$,
3. *Ayant représenté* $S^{(n)}(t)$ *comme* $T_{\sum_{p\geq 1} t^p W_p}$, *résoudre dans* $L(\{A, B\})$: $W_1 = A + B, W_2 = \cdots = W_k = 0$.

Les variétés, solutions des 3 problèmes, sont définies par le même idéal.

Démonstration. — Notant $x_{p,1}, \ldots, x_{p,l_p}$ la base de Lyndon de $\mathcal{L}_p(\{A, B\})$, on peut écrire

$$K_p = \sum_{i=1}^{l_p} K_{p,i} x_{p,i}, G_p = \sum_{i=1}^{l_p} G_{p,i} x_{p,i}, W_p = \sum_{i=1}^{l_p} W_{p,i} x_{p,i}. \tag{19.21}$$

Pour chacune des méthodes, les solutions sont les zéros des idéaux

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{I}_K^{(k)} & = & (K_{1,1} - 1, K_{1,2} - 1, K_{2,1}, K_{3,1}, \ldots, K_{k,1}, \ldots), \\ \mathfrak{I}_G^{(k)} & = & (G_{1,1} - 1, G_{1,2} - 1, G_{2,1}, G_{3,1}, \ldots, G_{k,1}, \ldots), \\ \mathfrak{I}_W^{(k)} & = & (W_{1,1} - 1, W_{1,2} - 1, W_{2,1}, W_{3,1}, \ldots, W_{k,1}, \ldots). \end{array} \tag{19.22}$$

Remarquons que S_W est la transformation de Deprit associée, non pas à $W(t)$, mais à la primitive de W qui s'annule en 0. On a, alors, les relations suivantes issues de la première partie (cf. proposition 14) :

$$\begin{array}{rcl} K_p & = & \frac{1}{p} W_p + R_p^W, \quad R_p^W \in L_p(W_1, \ldots, W_{p-1}), \\ \frac{1}{p} W_p & = & G_p + R_p^G, \quad R_p^G \in L_p(G_1, \ldots, G_{p-1}), \\ G_p & = & K_p + R_p^K, \quad R_p^K \in L_p(K_1, \ldots, K_{p-1}). \end{array} \tag{19.23}$$

Pour $p > 1$, chaque R_p^W, s'exprime dans la base de Lyndon $\mathcal{L}_p(\{A, B\})$, et les coefficients sont alors des polynômes en les $\{W_{1,1}, W_{1,2}, W_{2,1}, W_{3,1}, \ldots, W_{p-1,1}, \ldots, W_{p-1,l_{p-1}}\}$. Les monômes de ces polynômes contiennent tous un $W_{i,j}$ avec $i > 1$ et sont donc dans $\mathfrak{I}_W^{(k)}$. On en déduit que $\mathfrak{I}_K^{(k)} \subset \mathfrak{I}_W^{(k)}$.

On déduit, avec le même argument, que $\mathfrak{I}_W^{(k)} \subset \mathfrak{I}_G^{(k)}$ et $\mathfrak{I}_G^{(k)} \subset \mathfrak{I}_K^{(k)}$, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{I}_K^{(k)} = \mathfrak{I}_W^{(k)} = \mathfrak{I}_G^{(k)}. \tag{19.24}$$

⁂

Considérons, à présent, le lemme suivant :

LEMME 46. — *Soient les problèmes suivants :*

2. *Ayant représenté* $S^{(n)}(t)$ *comme* $\exp(-tL_{G_1})\cdots\exp(t^pL_{G_p})\cdots$, *résoudre dans* $L(\{A, B\})$: $G_1 = A + B, G_2 = \cdots = G_k = 0$

4. *Ayant posé* $Z = S^{(n)}(t)z$, *résoudre dans* $\tilde{L}_p(\{z, A, B\})$: $Z_0 = (\exp(-tL_{A+B})z)_0, \ldots, Z_k = (\exp(-tL_{A+B})z)_k$.

Les variétés solutions des deux problèmes ci-dessus sont définies par le même idéal.

Démonstration. — Pour tout $p \geq 1$, Z_p se décompose dans $\tilde{L}_p(\{z, A, B\})$. Notons $z_{p,1}, \ldots, z_{p,2^p}$ la base de Lyndon de ce sous-espace correspondant aux images de zw, où $w \in \{A, B\}_p^*$, par l'application de parenthésage Λ. On a alors, pour tout p, $Z_p = \sum_{q=1}^{2^p} Z_{p,q}z_{p,q}$, et les solutions du problème **4.** sont les zéros de l'idéal

$$\mathfrak{I}_Z^{(k)} = (Z_{i,j} - a_{i,j}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq 2^i) \tag{19.25}$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients obtenus, en décomposant $\exp(-tL_{A+B})z$ dans $\tilde{L}\{z, A, B\}$.

De $S^{(n)}(t)z - \exp(-tL_{A+B})z = \left(S^{(n)}(t) - \exp(-tL_{A+B})\right) z = o(t^k)$, on déduit terme à terme, pour $p \leq k$, que

$$Z_p - \tfrac{(-1)^p}{p!}L_{A+B}^p z = \left[\sum_{\wp(1,p;p)} (-1)^{m_1+\cdots+m_p} \frac{L_{G_1}^{m_1}\cdots L_{G_p}^{m_p}}{m_p!\cdots m_1!} - \tfrac{(-1)^p}{p!}L_{A+B}^p\right] z = 0. \tag{19.26}$$

On en déduit, pour $p = 1$, que

$$Z_1 - \{z, A + B\} = -(L_{G_1} - L_{A+B})z = \{z, G_1 - (A + B)\} = 0, \tag{19.27}$$

c'est-à-dire, sur la base $([z, A], [z, B])$,

$$Z_{1,1} - 1 = G_{1,1} - 1 = 0, \quad Z_{1,2} - 1 = G_{1,2} - 1 = 0. \tag{19.28}$$

À l'ordre p, (19.26) s'écrit

$$\begin{aligned} Z_p - \tfrac{(-1)^p}{p!}L_{A+B}^p z &= \left[\sum_{\wp(1,p;p)} (-1)^{m_1+\cdots+m_p} \frac{L_{G_1}^{m_1}\cdots L_{G_p}^{m_p}}{m_p!\cdots m_1!} - \tfrac{(-1)^p}{p!}L_{A+B}^p\right] z \\ &= \tfrac{(-1)^p}{p!}\left(L_{G_1}^p - L_{A+B}^p\right) z - L_{G_p}z + \qquad (19.29) \\ &\qquad \sum_{\wp(1,p-1;p),m_1<p} (-1)^{m_1+\cdots+m_{p-1}} \frac{L_{G_1}^{m_1}\cdots L_{G_p}^{m_p}}{m_p!\cdots m_1!} z. \qquad (19.30) \end{aligned}$$

$L^p_{G_1} - L^p_{A+B}$ s'écrit

$$\sum_{k_1+\cdots+k_p+l_1+\cdots+l_p=p} \left(G_{1,1}^{k_1+\cdots+k_p} G_{1,2}^{l_1+\cdots+l_p} - 1 \right) L_A^{k_1} L_B^{l_1} \cdots L_A^{k_p} L_B^{l_p} z. \tag{19.31}$$

Un coefficient de (19.31) s'écrit alors

$$G_{1,1}^k G_{1,2}^l - 1 = (G_{1,1}^k - 1) G_{1,2}^l + (G_{1,2}^l - 1) = (G_{1,1} - 1) P_1 + (G_{1,2} - 1) P_2, \tag{19.32}$$

et appartient donc à $\mathfrak{I}_G^{(p)}$. D'autre part, chaque $L_A^{k_1} L_B^{l_1} \cdots L_A^{k_p} L_B^{l_p} z$ se décompose linéairement sur la base de Lyndon et, par conséquent, les coefficients du terme $L^p_{G_1} - L^p_{A+B}$ appartiennent à $\mathfrak{I}_G^{(p)}$. Les autres termes de (19.29) et (19.30) se décomposent également et que les coefficients sont dans

$$\{G_{2,1}, \ldots, G_{p,1}, \ldots G_{p,l_p}\} \subset \mathfrak{I}_G^{(p)}. \tag{19.33}$$

Supposons prouvé, pour tout $m < p$, que $\mathfrak{I}_Z^{(m)} = \mathfrak{I}_G^{(m)}$. Alors, à l'ordre p,

- on déduit de (19.26), en identifiant chaque coefficient, que $\mathfrak{I}_Z^{(p)} \subset \mathfrak{I}_G^{(p)}$,
- de (19.26), on déduit également que

$$\begin{aligned} -L_{G_p} z \quad = \quad & \overbrace{Z_p - \frac{(-1)^p}{p!} L^p_{A+B} z} - \overbrace{\frac{(-1)^p}{p!} \left(L^p_{G_1} - L^p_{A+B} \right) z} - \\ & \underbrace{\sum_{\wp(1,p-1;p), m_1<n} (-1)^{m_1+\cdots+m_{p-1}} \frac{L_{G_1}^{m_1} \cdots L_{G_p}^{m_p}}{m_p! \cdots m_1!} z}. \end{aligned} \tag{19.34}$$

  Tous les termes, du côté droit de l'équation précédente, se décomposent sur la base $z_{p,q}$, et les coefficients sont, soit dans $\mathfrak{I}_Z^{(p)}$, soit dans $\mathfrak{I}_G^{(p-1)} \subset \mathfrak{I}_Z^{(p-1)}$, par hypothèse de récurrence. On en déduit alors que $L_{G_p} z$ se décompose sur les $z_{p,q}$ et les coefficients sont dans $\mathfrak{I}_Z^{(p)}$. G_p se décompose, alors, sur les $x_{p,q}$, par résolution d'un système linéaire à coefficients dans $\mathfrak{I}_Z^{(p)}$.

On a alors, $\mathfrak{I}_G^{(p)} \subset \mathfrak{I}_Z^{(p)}$.

⋆⋆⋆

Pour obtenir de façon directe des intégrateurs symplectiques, on pourra utiliser les trois méthodes suivantes qui sont équivalentes en vertu de lemme 46.

19.1.1. Méthode directe

Le problème (19.20) peut se résoudre de façon directe en cherchant pour tout z

$$S^{(n)}(t) z = S_A(c_1 t) S_B(d_1 t) \cdots S_A(c_n t) S_B(d_n t) z = S_h(t) z + o(t^k). \tag{19.35}$$

19.1.2. Fonction invariante

On peut re-formuler le problème (19.35) en exprimant $S^{(n)}$ comme une exponentielle et en cherchant $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots d_n$ tels que

$$S_A(c_1 t) S_B(d_1 t) \cdots S_A(c_n t) S_B(d_n t) = e^{-t L_K} \tag{19.36}$$

avec $K = h + o(t^{k-1})$. K n'est pas le Hamiltonien du système hamiltonien associé à $S^{(n)}$, mais, simplement, une fonction invariante du système. Cette technique est utilisée par Yoshida.

19.1.3. Hamiltonien perturbé

On peut également exprimer $S^{(n)}(t)$ comme une transformation de Lie

$$S_A(c_1 t) S_B(d_1 t) \cdots S_A(c_n t) S_B(d_n t) = S_W \tag{19.37}$$

où $W = h + o(t^{k-1})$. La condition est obtenue en écrivant que

$$\frac{d}{dt} S_W = -S_W L_W = -S_h L_h + o(t^{k-1}). \tag{19.38}$$

Le Hamiltonien du système hamiltonien associé est alors donné par W.

⁂

Les trois méthodes produisent des solutions égales, ce qui paraissait clair. Les lemmes 45 et 46 prouvent qu'elles conduisent à étudier les mêmes objets algébriques.

19.2. Calcul des premiers intégrateurs

Pour chaque ordre fixé, aussi bien par une méthode que par une autre, on cherche n tel que $S^{(n)}(t)$ soit un intégrateur d'ordre k. Pour ce faire, on tente de chercher les solutions d'un système d'équations polynomiales, c'est-à-dire que l'on cherche les points de la variété définie par l'idéal des équations polynomiales. On utilise ici des méthodes algébriques d'élimination ou de calcul de bases standard. Les logiciels utilisés sont, soit Macaulay, qui calcule des bases standard dans un anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, soit, lorsque ce sera possible, Axiom.

Pour des petits ordres, ces méthodes fournissent des intégrateurs symplectiques. D'ailleurs, on utilise la représentation par les transformations de Lie (Deprit), ce qui a l'avantage d'éviter le calcul d'identités exponentielles.

En utilisant les transformations de Lie, on obtient à l'ordre 4

$$\begin{aligned} W = {} & W_{1,1} A + W_{1,2} B + \tfrac{1}{2} W_{2,1} [A,\, B] + \tfrac{1}{3} W_{3,1} [A,\, [A,\, B]] + \tfrac{1}{3} W_{3,2} [[A,\, B],\, B] \\ & + \tfrac{1}{3} W_{4,1} [A,\, [A,\, [A,\, B]]] + \tfrac{1}{3} W_{4,2} [A,\, [[A,\, B],\, B]] + \tfrac{1}{3} W_{4,3} [A,\, [[A,\, B],\, B]], \end{aligned}$$

où les $W_{i,j}$ sont des polynômes. Pour $n = 4$, et 7 variables $c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3$, on a

$$\begin{aligned} W_{1,1} = {} & c_4 + c_3 + c_2 + c_1 \\ W_{1,2} = {} & d_3 + d_2 + d_1 \\ W_{2,1} = {} & (c_4 - c_3 - c_2 - c_1)\, d_3 + (c_4 + c_3 - c_2 - c_1)\, d_2 + (c_4 + c_3 + c_2 - c_1)\, d_1 \\ W_{3,1} = {} & (\tfrac{1}{2}\, c_4^2 + (-c_3 - c_2 - c_1)\, c_4)\, d_3 + (\tfrac{1}{2}\, c_4^2 + (c_3 - c_2 - c_1)\, c_4 + \tfrac{1}{2}\, c_3^2 + (-c_2 - c_1)\, c_3)\, d_2 \\ & + (\tfrac{1}{2}\, c_4^2 + (c_3 + c_2 - c_1)\, c_4 + \tfrac{1}{2}\, c_3^2 + (c_2 - c_1)\, c_3 + \tfrac{1}{2}\, c_2^2 - c_1\, c_2)\, d_1 \\ W_{3,2} = {} & (\tfrac{1}{2}\, c_3 + \tfrac{1}{2}\, c_2 + \tfrac{1}{2}\, c_1)\, c^2 + ((-c_3 + c_2 + c_1)\, d_2 + (-c_3 - c_2 + c_1)\, d_1)\, d_3 + (\tfrac{1}{2}\, c_2 \\ & + \tfrac{1}{2}\, c_1)\, d_2^2 + (-c_2 + c_1)\, d_1\, d_2 + \tfrac{1}{2}\, c_1\, a^2 \\ W_{4,1} = {} & (\tfrac{1}{6}\, c_4^3 + (\tfrac{1}{2}\, c_3 - \tfrac{1}{2}\, c_2 - \tfrac{1}{2}\, c_1)\, c_4^2)\, d_3 + (\tfrac{1}{6}\, c_4^3 + (\tfrac{1}{2}\, c_3 - \tfrac{1}{2}\, c_2 - \tfrac{1}{2}\, c_1)\, c_4^2 + (\tfrac{1}{2}\, c_3^2 + (-c_2 \\ & - c_1)\, c_3)\, c_4 + \tfrac{1}{6}\, c_3^3 + (-\tfrac{1}{2}\, c_2 - \tfrac{1}{2}\, c_1)\, c_3^2)\, d_2 + (\tfrac{1}{6}\, c_4^3 + (\tfrac{1}{2}\, c_3 + \tfrac{1}{2}\, c_2 - \tfrac{1}{2}\, c_1)\, c_4^2 + (\tfrac{1}{2}\, c_3^2 \\ & + (c_2 - c_1)\, c_3 + \tfrac{1}{2}\, c_2^2 - c_1\, c_2)\, c_4 + \tfrac{1}{6}\, c_3^3 + (\tfrac{1}{2}\, c_2 - \tfrac{1}{2}\, c_1)\, c_3^2 + (\tfrac{1}{2}\, c_2^2 - c_1\, c_2)\, c_3 + \tfrac{1}{6}\, c_2^3 \\ & - \tfrac{1}{2}\, c_1\, c_2^2)\, d_1 \end{aligned}$$

$$W_{4,2} = (\tfrac{1}{2}\ c_3 + \tfrac{1}{2}\ c_2 + \tfrac{1}{2}\ c_1)\ c_4\ c^2 + (((-c_3 + c_2 + c_1)\ c_4 - \tfrac{1}{2}\ c_3^2 + (c_2 + c_1)\ c_3)\ d_2 + ((-c_3 - c_2 + c_1)\ c_4 - \tfrac{1}{2}\ c_3^2 + (-c_2 + c_1)\ c_3 - \tfrac{1}{2}\ c_2^2 + c_1\ c_2)\ d_1)\ d_3 + ((\tfrac{1}{2}\ c_2 + \tfrac{1}{2}\ c_1)\ c_4 + (\tfrac{1}{2}\ c_2 + \tfrac{1}{2}\ c_1)\ c_3)\ d_2^2 + ((-c_2 + c_1)\ c_4 + (-c_2 + c_1)\ c_3 - \tfrac{1}{2}\ c_2^2 + c_1\ c_2)\ d_1\ d_2 + (\tfrac{1}{2}\ c_1\ c_4 + \tfrac{1}{2}\ c_1\ c_3 + \tfrac{1}{2}\ c_1\ c_2)\ a^2$$

$$W_{4,3} = (-\tfrac{1}{6}\ c_3 - \tfrac{1}{6}\ c_2 - \tfrac{1}{6}\ c_1)\ c^3 + ((\tfrac{1}{2}\ c_3 - \tfrac{1}{2}\ c_2 - \tfrac{1}{2}\ c_1)\ d_2 + (\tfrac{1}{2}\ c_3 + \tfrac{1}{2}\ c_2 - \tfrac{1}{2}\ c_1)\ d_1)\ c^2 + ((-\tfrac{1}{2}\ c_2 - \tfrac{1}{2}\ c_1)\ d_2^2 + (c_2 - c_1)\ a\ d_2 - \tfrac{1}{2}\ c_1\ a^2)\ d_3 + (-\tfrac{1}{6}\ c_2 - \tfrac{1}{6}\ c_1)\ d_2^3 + (\tfrac{1}{2}\ c_2 - \tfrac{1}{2}\ c_1)\ d_1\ d_2^2 - \tfrac{1}{2}\ c_1\ d_1^2\ d_2 - \tfrac{1}{6}\ c_1\ a^3$$

- Une solution pour $k = 1$ est donnée par $c_1 = d_1 = 1$ et

$$S_1 = S^{(1)}(t) = S_A(\tfrac{t}{2}) S_B(\tfrac{t}{2}). \tag{19.39}$$

- Une solution pour $k = 2$ est donnée par

$$c_1 + c_2 = 1, d_1 = 1, (c_2 - c_1) d_1 = 0, \tag{19.40}$$

c'est-à-dire, $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, d_1 = 1$ et

$$S_2(t) = S^{(2)}(t) = S_A(\tfrac{t}{2}) S_B(t) S_A(\tfrac{t}{2}). \tag{19.41}$$

Appliquer n fois l'opérateur $S_2(\tau)$ revient à appliquer une fois $S_A(\frac{t}{2})$ puis n fois l'opérateur S_1 d'ordre 1 (19.39).

- Les solutions pour $k = 3$ sont les solutions du système d'équations polynomiales :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_3 + c_2 + c_1 & = & 1 \\ d_2 + d_1 & = & 1 \\ (c_3 - c_2 - c_1) d_2 + (c_3 + c_2 - c_1) d_1 & = & 0 \\ (\frac{1}{2}\ c_3^2 + (-c_2 - c_1)\ c_3)\ d_2 + (\frac{1}{2}\ c_3^2 + (c_2 - c_1)\ c_3 + \frac{1}{2}\ c_2^2 - c_1\ c_2)\ d_1 & = & 0 \\ (\frac{1}{2}\ c_2 + \frac{1}{2}\ c_1)\ d_2^2 + (-c_2 + c_1)\ d_1\ d_2 + \frac{1}{2}\ c_1\ d_1^2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{19.42}$$

qui se ramène, par éliminations successives, à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_2 + 2\ c_1 & = & 1 \\ d_1 - 2\ c_1 & = & 0 \\ c_3 + c_1 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ c_2 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ c_1^2 - \frac{1}{2}\ c_1 + \frac{1}{12} & = & 0 \end{array} \right. . \tag{19.43}$$

On remarque que c_3 et c_1 sont racines conjuguées tout comme $d_1 = 2c_1$ et $d_2 = 2c_3$. Par contre, les solutions ne sont pas réelles. On doit ajouter un terme supplémentaire, et on obtient par exemple comme solution réelle (et même rationnelle) :

$$c_1 = \tfrac{2}{3}, d_3 = \tfrac{1}{24}, d_2 = -\tfrac{3}{4}, d_1 = -\tfrac{7}{24}, c_3 = 1, c_2 = -\tfrac{2}{3}. \tag{19.44}$$

La solution précédente, avec 6 termes, a également été trouvée par Forest & Ruth ([20]).

- Après éliminations successives, le système d'équations polynomiales est équivalent pour $k = 4$ à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_3 + 288\ c_1^4 - 312\ c_1^3 + 96\ c_1^2 - 14\ c_1 + \frac{1}{2} & = & 0 \\ d_2 - 288\ c_1^4 + 312\ c_1^3 - 96\ c_1^2 + 16\ c_1 - \frac{3}{2} & = & 0 \\ d_1 - 2\ c_1 & = & 0 \\ c_4 + 144\ c_1^4 - 156\ c_1^3 + 48\ c_1^2 - 7\ c_1 + \frac{1}{4} & = & 0 \\ c_3 + c_1 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ c_2 - 144\ c_1^4 + 156\ c_1^3 - 48\ c_1^2 + 7\ c_1 - \frac{3}{4} & = & 0 \\ c_1^5 - \frac{5}{4}\ c_1^4 + \frac{13}{24}\ c_1^3 - \frac{1}{8}\ c_1^2 + \frac{1}{64}\ c_1 - \frac{1}{1152} & = & 0 \end{array} \right. . \tag{19.45}$$

Le dernier polynôme se factorise en

$$(c_1^2 - \tfrac{1}{4}\ c_1 + \tfrac{1}{24})\ (c_1^3 - c_1^2 + \tfrac{1}{4}\ c_1 - \tfrac{1}{48}), \tag{19.46}$$

dont le premier facteur n'admet pas de solution réelle.

Si c_1 est racine de $(c_1^3 - c_1^2 + \frac{1}{4}\ c_1 - \frac{1}{48})$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_3 - 2\ c_1 & = & 0 \\ d_2 + 4\ c_1 - 1 & = & 0 \\ d_1 - 2\ c_1 & = & 0 \\ c_4 - c_1 & = & 0 \\ c_3 + c_1 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ c_2 + c_1 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ c_1^3 - c_1^2 + \frac{1}{4}\ c_1 - \frac{1}{48} & = & 0 \end{array} \right. , \tag{19.47}$$

ou encore, par exemple pour $c_1 = \frac{1}{2(\sqrt[3]{2}-1)}$,

$$c_4 = c_1 = \frac{1}{2(\sqrt[3]{2}-1)}, d_3 = d_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}, d_2 = \frac{\sqrt[3]{2}-3}{\sqrt[3]{2}-1}, c_2 = c_3 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}-1}. \tag{19.48}$$

On retrouve alors, les solutions obtenues par Forest & Ruth ([20]) ou Yoshida ([61]).

Si c_1 est racine de $(c_1^2 - \frac{1}{4}\ c_1 + \frac{1}{24})$, on obtient deux solutions supplémentaires

$$d_3 + 2\ c_1 = \tfrac{1}{2}, d_2 = \tfrac{1}{2}, d_1 = 2\ c_1, c_4 + c_1 = \tfrac{1}{4}, c_3 + c_1 = \tfrac{1}{2}, c_2 - c_1 = \tfrac{1}{4}, \tag{19.49}$$

ou de façon équivalente

$$c_4 = \bar{c_1}, c_3 = \bar{c_2} = \tfrac{1}{2} - c_1, d_3 = \bar{d_1} = 2\bar{c_1}, d_2 = \tfrac{1}{2}. \tag{19.50}$$

- Pour $k = 5$, on ne trouve pas directement de solutions. On peut, jusqu'à présent, en utilisant Macaulay, dire qu'il y à 46 solutions pour des intégrateurs obtenus comme produit de 11 opérateurs (les calculs sont effectués dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pour $p = 31991$). Le système Axiom ne vient, quant à lui, pas à bout des calculs.

- Pour $k = 6$, il n'existe pas de solution, produit de moins de 13 opérateurs. Au dessus de 13, je n'ai trouvé aucun moyen raisonnable pour savoir si la variété algébrique des solutions était vide ou pas.

On remarque que, pour $k = 2$ et $k = 4$, les intégrateurs à valeurs réelles sont réversibles, c'est-à-dire, si $S(t)$ est un intégrateur d'ordre k, on a

$$S(-t) = S^{-1}(t). \tag{19.51}$$

Cette remarque nous invite alors à rechercher des intégrateurs symplectiques réversibles. La réversibilité est également un critère supplémentaire de stabilité.

19.3. Recherches d'intégrateurs réversibles

Si on suppose que l'intégrateur est réversible, on a alors le résultat suivant ([61]) :

LEMME 47. — *Si $S(t) = e^{-tL_{K(t)}}$ est un intégrateur réversible, alors $K(t) = K(-t)$.*

L'existence de K est assurée par le théorème de Campbell-Hausdorff. Comme

$$\left[e^{-tL_{K(t)}}\right]^{-1} = e^{tL_{K(t)}} \tag{19.52}$$

on déduit que $L_{K(t)} = L_{K(-t)}$ donc que $K(t) = K(-t)$.

⋆⋆⋆

On peut, alors, chercher directement des intégrateurs réversibles d'ordre $2k$. On cherche $c_0, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ et $S_r^{(n)} = S_h(t) + o(t^{2k})$ sous la forme

$$S_A(c_nt)S_B(d_nt)\cdots S_A(c_1t)S_B(d_1t)S_A(c_0t)S_B(d_1t)S_A(c_1t)\cdots S_B(d_nt)S_A(c_nt). \tag{19.53}$$

On peut exprimer $S_r^{(n)}$, soit sous la forme d'une exponentielle e^{-tL_K}, soit sous la forme d'une transformation de Lie S_W, les solutions obtenues étant strictement les mêmes grâce au lemme 46. Si on exprime $S_r^{(n)}$ sous forme d'exponentielle, on obtient un Hamiltonien pair K et la recherche de l'intégrateur d'ordre $2k$ se fait en annulant simultanément des équations polynomiales de degré impair, en nombre dim $L_{2p+1}(\{A, B\})$. Sinon, on obtient un Hamiltonien W, qui n'est pas pas pair et l'on doit, *a priori*, considérer les termes de degré impair. Cependant, la proposition suivante nous permet de ne considérer que les termes d'ordre pair :

PROPOSITION 48. — *Si $S_{W(t)}$ est réversible et si, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on a $W(t) = h + o(t^{2k-1})$, alors $W(t) = h + o(t^{2k})$.*

Définissons $K(t) = \sum_{i\geq 0} t^i K_{i+1} \in \tilde{L}(\{K_1, \ldots, K_n\})$, tel que

$$S_W = \exp(-tL_K) = S_h(t) + o(t^{2k}). \tag{19.54}$$

Ici, l'anneau de base est $\mathbb{Q}[c_0, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n]$. K et W sont liés par des expressions de la forme (cf. proposition 14) :

$$K_p = \tfrac{1}{p}W_p + W_p', \quad p \geq 1, \quad \text{où} \quad W_p' \in \tilde{L}(K_1, \ldots, K_{p-1}). \tag{19.55}$$

Supposons donc que $W = h + o(t^{2k-1})$, c'est-à-dire que $W_1 = h, W_2 = \cdots = W_{2k-1} = 0$. Puisque S_W est réversible on déduit que $K_{2k} = 0$, c'est-à-dire $W_{2k} + W_{2k}' = 0$. Mais $W_{2k}' \in \tilde{L}(K_1, \ldots, K_{2k-1})$, donc est nul car de poids $2k$. Par conséquent, $W_{2k} = 0$ et $W = h + o(t^{2k})$.

⋆⋆⋆

Dans le cas de la recherche d'intégrateurs réversibles sous forme de transformations de Lie, il suffira donc d'annuler les termes d'ordre pair. On utilise d'autant mieux la transformation de Lie que le générateur W se déduit sans utiliser d'identités exponentielles. La recherche directe, pour les petits ordres s'effectue de la façon suivante :

— on calcule les polynômes à annuler, c'est-à-dire les coefficients de la série de Lie,

— on calcule une base standard, pour l'ordre de l'élimination, de l'idéal définissant la variété. D'ailleurs, on utilise le logiciel Macaulay pour calculer les bases standard en modulaire. C'est seulement dans le cas où la variété des solutions n'est pas vide dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, que l'on tente de la calculer sur $\mathbb{Q}$, en utilisant Axiom.

Précisons la proposition 48.

PROPOSITION 49. — *Soit* $\mathfrak{I}_W^{(2k)} = (W_{1,1} - 1, W_{1,2} - 1, W_{2,1}, \ldots, W_{2k,1}, \ldots, W_{2k,l_{2k}})$, *l'idéal définissant la variété des solutions de* $S_r^{(n)}(t) = S_{W(t)} = S_h + o(t^{2k})$, *alors, pour tout* $p \leq k$, *on a*

$$\{W_{2p,1}, \ldots, W_{2p,l_{2p}}\} \subset \mathfrak{I}_W^{(2p-1)} \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \mathfrak{I}_W^{(2p)} = \mathfrak{I}_W^{(2p-1)}. \tag{19.56}$$

Pour tout $p \geq 1$, on obtient, en recherchant les solutions de $S_r^{(n)}(t)$ sous la forme exponentielle $\exp(-\sum_{i\geq 1} t^i K_i)$, l'idéal

$$\mathfrak{I}_K^{(p)} = (K_{1,1} - 1, K_{1,2} - 1, K_{2,1}, \ldots, K_{p,1}, K_{p,l_p}) \tag{19.57}$$

où les $K_{i,j}$ sont des polynômes homogènes de degré i. D'après le lemme 45, on a $\mathfrak{I}_K^{(p)} = \mathfrak{I}_W^{(p)}$, pour tout $p \leq 2k$. Cependant comme S_W est réversible, on a $K_{2p} = 0$, pour tout p, c'est-à-dire $\mathfrak{I}_K^{2p} = \mathfrak{I}_K^{2p-1}$ et $\mathfrak{I}_W^{2p} = \mathfrak{I}_W^{2p-1}$.

⁂

Le lemme précédent nous permet de ne considérer que les polynômes de degré impair.

• Pour $k = 4$, on trouve, à l'ordre 3,

$$\begin{aligned} W &= (2\ d_1 + 2\ d_2)\ A + (c_0 + 2\ c_1)\ B \\ &+ \tfrac{t^2}{3}((-\tfrac{1}{2}\ d_1^2 - d_2\ d_1 - \tfrac{1}{2}\ d_2^2)\ c_0 + (2\ d_1^2 - 2\ d_2\ d_1 - d_2^2)\ c_1)[A,\ [A,\ B]] \\ &+ \tfrac{t^2}{3}((\tfrac{1}{2}\ d_1 + \tfrac{1}{2}\ d_2)\ c_0^2 + (-d_1 + 2\ d_2)\ c_1\ c_0 + (-d_1 + 2\ d_2)\ c_1^2)\ [[A,\ B],\ B]. \end{aligned}$$

La solution générale est donnée par

$$c_0 + 4\ d_2 - 1 = 0, c_1 - 2\ d_2 = 0,\ d_1 + d_2 - \tfrac{1}{2} = 0, d_2^3 - d_2^2 + \tfrac{1}{4}\ d_2 - \tfrac{1}{48} = 0. \tag{19.58}$$

On retrouve trois des solutions obtenues avec la méthode précédente et en particulier la solution réelle :

$$d_2 = \tfrac{1}{2(\sqrt[3]{2}-1)}, d_1 = \tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}-1}, c_1 = \tfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}, c_0 = \tfrac{\sqrt[3]{2}-3}{\sqrt[3]{2}-1}. \tag{19.59}$$

• Pour $k = 6$, on trouve, avec $n = 8$, une variété de dimension 0, en utilisant Macaulay. Le degré étant 39, on en déduit qu'il y a au plus 39 solutions. Ces solutions fourniraient des intégrateurs d'ordre 6 comme produit réversible de 15 opérateurs. Malheureusement, on ne trouve pas directement les solutions sur $\mathbb{Q}$. Néanmoins, on trouve ces solutions en utilisant la méthode proposée par Yoshida ([61]) et que nous évoquerons immédiatement après.

⁂

Pour des ordres plus élevés, on trouve le système d'équations polynomiales à résoudre mais on ne trouve pas plus de solutions qu'avec la méthode directe. On donne ici (tableau 2) le nombre d'équations polynomiales à résoudre, dans le cas où l'on ne compte que les termes pairs ou tous les termes. Le nombre d'équations est, en fait, la dimension de $L_n(\{A, B\})$.

Nombre d'équations				
Ordre	Non réversible		Réversible	
1	2		2	
2	1	**3**		**2**
3	2		2	
4	3	**8**		**4**
5	6		6	
6	9	**23**		**10**
7	18		18	
8	30	**71**		**28**
9	56		56	
10	99	**226**		**84**

Tableau 2

20. Recherche d'intégrateurs d'ordre supérieur

L'intérêt de ne considérer que des intégrateurs réversibles, réside également dans le fait, que l'on peut trouver un intégrateur d'ordre $2k+2$, en fonction d'un intégrateur d'ordre $2k$. En effet, on a le lemme (cf. [54]) :

Lemme 50. — *Si $S_{2k}(t)$ est un intégrateur symplectique d'ordre $2k$, alors*

$$S(t) = S_{2k}(\tfrac{1}{2-\omega_{2k+1}}t)S_{2k}(-\tfrac{\omega_{2k+1}}{2-\omega_{2k+1}}t)S_{2k}(\tfrac{1}{2-\omega_{2k+1}}t) \tag{20.1}$$

est un intégrateur symplectique d'ordre $2k+2$, dès que $\omega_{2k+1}^{2k+1}=2$.

Il suffit d'écrire

$$S_{2k}(t) = e^{-t(K_1+t^{2k}K_{2k+1}^{(2k)}+o(t^{2k+1}))} \tag{20.2}$$

et

$$\log\left[S_{2k}(at)S_{2k}(bt)S_{2k}(at)\right] = t(2a+b)K_1 + t^{2k+1}(2a^{2k+1}+b^{k+1})K_{2k+1}^{(2k)} + o(t^{2k+2}). \tag{20.3}$$

On doit avoir $2a+b=1, 2a^{2k+1}+b^{2k+1}=0$ et $b=-\omega_{2k+1}a, a(2-\omega_{2k+1})=1$, c'est-à-dire,

$$a = \tfrac{1}{2-\omega_{2k+1}},\ b = -\tfrac{\omega_{2k+1}}{2-\omega 2k+1}. \tag{20.4}$$

Avec l'intégrateur $S_2(t) = e^{-\frac{1}{2}tL_A}e^{-tL_B}e^{-\frac{1}{2}tL_A}$, on retrouve l'intégrateur d'ordre 4

$$S_4(t) = S_2(\tfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}t)S_2(\tfrac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}t)S_2(\tfrac{1}{2-\sqrt[3]{2}}t). \tag{20.5}$$

Cette méthode permet de construire des intégrateurs d'ordre pair, mais un intégrateur d'ordre $2k$ est produit de $2.3^{k-1}+1$ opérateurs d'ordre 1, S_A ou S_B. De cette manière, on trouverait un intégrateur d'ordre 6, produit de 19 opérateurs élémentaires, et un intégrateur d'ordre 8, comme produit de 55 opérateurs.

20.1. Construction d'intégrateurs produits d'intégrateurs d'ordre 2

Comme on ne trouve pas directement de solutions en cherchant des intégrateurs réversibles pour des ordre élevés, Yoshida ([61]) propose la recherche d'intégrateurs réversibles, comme produits réversibles d'intégrateurs d'ordre 2.

Soit $S_2(t)$, l'intégrateur d'ordre 2 défini en (19.41). On cherche des intégrateurs réversibles produits de S_2, sous la forme

$$S^{(n)}(t) \quad = \quad S_2(c_n t)\cdots S_2(c_1 t) S_2(c_0 t) S_2(c_1 t)\cdots S_2(c_n t) = e^{-tL_{K^{(n)}}}. \qquad (20.6)$$

De façon équivalente, on peut écrire, à partir de

$$\log S_2(t) = \sum_{i\geq 0} t^{2i+1} K^{(n)}_{2i+1}, \qquad (20.7)$$

$$K^{(0)} \quad = \quad \sum_{i\geq 0} t^{2i} c_0^{2i} K_{2i+1}, \qquad (20.8)$$

$$-tK^{(n+1)} \quad = \quad \log\left[e^{-\sum_{i\geq 0} t^{2i+1} c_n^{2i} L_{K_{2i+1}}} e^{-tL_{K^{(n)}(t)}} e^{-\sum_{i\geq 0} t^{2i+1} c_n^{2i} L_{K_{2i+1}}}\right]. \qquad (20.9)$$

Considérant l'alphabet $X = \{K_{2i+1}, i \geq 0, |K_{2i+1}|_* = 2i+1\}$, $K^{(n)}$ s'exprime comme série formelle de Lie de $\tilde{L}(X, R)$, où R est l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Notons, alors, la base de Lyndon de $\tilde{L}_n(X)$ par $\{K_{n,1}, \ldots, K_{n,l_n}\}$, où $l_n = \dim \tilde{L}_n(X)$. On peut écrire,

$$K^{(n)} = \sum_{i\geq 0} t^{2i} \sum_{j=1}^{l_{2i+1}} k^{(n)}_{2i+1,j} K_{2i+1,j}. \qquad (20.10)$$

On trouve, alors, les équations qui définissent les coefficients $c_0, \ldots, c_n$, en exprimant, de façon récurrente, les $k^{(n+1)}_{2i+1,j}$ en fonction des $k^{(n)}_{2i+1,j}$. Pour ce faire

— on calcule les différentes bases de Lyndon pour les ordres impairs,

— on calcule formellement, à un ordre donné, $\log\left[S_2(c_n t) e^{-tL_K} S_2(c_n t)\right]$, où

$$K = \sum_{i\geq 0} \sum_{j=1}^{l_{2i+1}} k_{2i+1,j} K_{2i+1,j} \qquad (20.11)$$

est un élément générique de l'algèbre de Lie.

La base de Lyndon, à l'ordre 9, de $\tilde{L}(X)$ est

$K_{1,1} = k_1, K_{3,1} = k_3, K_{5,1} = k_5, K_{5,2} = [k_1, [k_1,\ k_3]],$
$K_{7,1} = k_7, K_{7,2} = [[k_1,\ k_3],\ k_3], K_{7,3} = [k_1,\ [k_1,\ k_5]], K_{7,4} = [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ k_3]]]],$
$K_{9,1} = k_9, K_{9,2} = [[k_1,\ k_5],\ k_3], K_{9,3} = [k_1,\ [k_3,\ k_5]], K_{9,4} = [k_1,\ [k_1,\ k_7]],$
$\quad K_{9,5} = [[k_1,\ [k_1,\ k_3]],\ [k_1,\ k_3]], K_{9,6} = [k_1,\ [k_1,\ [[k_1,\ k_3],\ k_3]]],$
$\quad K_{9,7} = [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ k_5]]]], K_{9,8} = [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ [k_1,\ k_3]]]]]].$

On trouve alors, à l'ordre 9, les relations suivantes :

$$k_{1,1}^{(n+1)} = k_{1,1}^{(n)} + 2\ c_n,$$

$$k_{3,1}^{(n+1)} = k_{3,1}^{(n)} + 2\ c_n^3,$$

$$k_{5,1}^{(n+1)} = k_{5,1}^{(n)} + 2\ c_n^5,$$

$$k_{5,2}^{(n+1)} = k_{5,2}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{3,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n^3\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{1}{6}\ c_n^4\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{7,1}^{(n+1)} = k_{7,1}^{(n)} + 2\ c_n^7,$$

$$k_{7,2}^{(n+1)} = k_{7,2}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ a_{5,1} + \tfrac{1}{6}\ c_n^5\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{1}{6}\ c_n^6\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{7,3}^{(n+1)} = k_{7,3}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n\ {k_{3,1}^{(n)}}^2 + (-\tfrac{1}{6}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n^4)\ a_{3,1} - \tfrac{1}{6}\ c_n^6\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{7,4}^{(n+1)} = k_{7,4}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{5,2}^{(n)} + (\tfrac{1}{360}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \tfrac{1}{45}\ c_n^2\ {a_{1,1}}^2 + \tfrac{7}{180}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)}$$
$$+ \tfrac{7}{360}\ c_n^4)\ k_{3,1}^{(n)} - \tfrac{1}{360}\ c_n^3\ {k_{1,1}^{(n)}}^4 - \tfrac{1}{45}\ c_n^4\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 - \tfrac{7}{180}\ c_n^5\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 - \tfrac{7}{360}\ c_n^6\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{9,1}^{(n+1)} = k_{9,1}^{(n)} + 2\ c_n^9,$$

$$k_{9,2}^{(n)} = k_{9,2}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{7,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{1}{6}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{9,3}^{(n+1)} = k_{9,3}^{(n)} + (\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{3,1}^{(n)} - \tfrac{1}{3}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^4)\ k_{5,1}^{(n)} + (\tfrac{1}{6}\ c_n^5\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{3}\ c_n^6)\ k_{3,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{9,4}^{(n+1)} = k_{9,4}^{(n)} + (\tfrac{1}{3}\ c_n\ k_{3,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n^4)\ k_{5,1}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n^5\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n^6)\ k_{3,1}^{(n)} - \tfrac{1}{3}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{9,5}^{(n+1)} = k_{9,5}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{7,2}^{(n)} + (\tfrac{1}{360}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \tfrac{1}{45}\ c_n^2\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{7}{180}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)}$$
$$+ \tfrac{7}{360}\ c_n^4)\ k_{5,1}^{(n)} - \tfrac{1}{360}\ c_n^5\ {k_{1,1}^{(n)}}^4 - \tfrac{1}{45}\ c_n^6\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 - \tfrac{7}{180}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 - \tfrac{7}{360}\ c_n^8\ a_{1,1},$$

$$k_{9,6}^{(n+1)} = k_{9,6}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ a_{1,1} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{7,3}^{(n)} + (\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{3,1}^{(n)} + \tfrac{1}{6}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{3}\ c_n^4)\ k_{5,2}^{(n)} + (-\tfrac{1}{120}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^2$$
$$- \tfrac{2}{45}\ c_n^2\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{7}{180}\ c_n^3)\ {k_{3,1}^{(n)}}^2 + (\tfrac{1}{120}\ c_n^3\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \tfrac{1}{45}\ c_n^4\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 - \tfrac{7}{180}\ c_n^5\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{7}{120}\ c_n^6)\ k_{3,1}^{(n)}$$
$$+ \tfrac{1}{45}\ c_n^6\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \tfrac{7}{90}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{7}{120}\ c_n^8\ a_{1,1},$$

$$k_{9,7}^{(n+1)} = k_{9,7}^{(n)} + (-\tfrac{1}{3}\ c_n\ a_{3,1} + \tfrac{1}{6}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^4)\ k_{5,2}^{(n)} + (\tfrac{1}{360}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{1}{30}\ c_n^2\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{1}{45}\ c_n^3)\ {k_{3,1}^{(n)}}^2$$
$$+ (-\tfrac{1}{360}\ c_n^3\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 - \tfrac{2}{45}\ c_n^4\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 - \tfrac{1}{180}\ c_n^5\ k_{1,1}^{(n)} + \tfrac{7}{360}\ c_n^6)\ k_{3,1}^{(n)} + \tfrac{1}{90}\ c_n^6\ {a_{1,1}}^3 - \tfrac{1}{60}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2$$
$$- \tfrac{7}{360}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)},$$

$$k_{9,8}^{(n+1)} = k_{9,8}^{(n)} + (-\tfrac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{7,4}^{(n)} + (\tfrac{1}{360}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \tfrac{1}{45}\ c_n^2\ {a_{1,1}}^2 + \tfrac{7}{180}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)}$$
$$+ \tfrac{7}{360}\ c_n^4)\ k_{5,2}^{(n)} + (-\tfrac{1}{15120}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^5 - \tfrac{1}{1260}\ c_n^2\ {k_{1,1}^{(n)}}^4 - \tfrac{53}{15120}\ c_n^3\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 - \tfrac{13}{1890}\ c_n^4\ {k_{1,1}^{(n)}}^2$$
$$- \tfrac{31}{5040}\ c_n^5\ k_{1,1}^{(n)} - \tfrac{31}{15120}\ c_n^6)\ k_{3,1}^{(n)} + \tfrac{1}{15120}\ c_n^3\ {k_{1,1}^{(n)}}^6 + \tfrac{1}{1260}\ c_n^4\ {k_{1,1}^{(n)}}^5 + \tfrac{53}{15120}\ c_n^5\ {k_{1,1}^{(n)}}^4$$
$$+ \tfrac{13}{1890}\ c_n^6\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \tfrac{31}{5040}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \tfrac{31}{15120}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)}.$$

⁎⁎⁎

Avec $k_{1,1}^{(1)} = c_0,\ k_{3,1}^{(1)} = c_0^3,\ k_{2i+1}^{(1)} = c_0^{2i+1}$, on trouve pour les différents ordres :

• Pour $k = 4$ et $n = 1$,

$$k^{(2)}_{1,1} = c_0 + 2c_1,\ k^{(2)}_{3,1} = c_0^3 + 2c_1^3 \tag{20.12}$$

et la solution pour avoir un intégrateur d'ordre 4 est $k^{(2)}_{1,1} = 1,\ k^{(2)}_{3,1} = 0$, c'est-à-dire,

$$c_1 = \frac{1}{2-\sqrt[3]{2}},\ c_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}. \tag{20.13}$$

• Pour $k = 6$ et $n = 4$, on trouve, pour les coefficients,

$$k^{(2)}_{1,1} = c_0 + 2c_1 + 2c_2 + 2c_3,$$

$$k^{(2)}_{3,1} = c_0^3 + 2c_1^3 + 2c_2^3 + 2c_3^3,$$

$$k^{(2)}_{5,1} = 2\ c_3^5 + 2\ c_2^5 + 2c_1^5 + c_0^5,$$

$$\begin{aligned}k^{(2)}_{5,2} &= (\tfrac{1}{3}\ c_2 + \tfrac{1}{3}\ c_1 + \tfrac{1}{6}\ c_0)\ c_3^4 + (\tfrac{2}{3}\ c_2^2 + (\tfrac{4}{3}\ c_1 + \tfrac{2}{3}\ c_0)\ c_2 + \tfrac{2}{3}\ c_1^2 + \tfrac{2}{3}\ c_0\ c_1 + \tfrac{1}{6}\ c_0^2)\ c_3^3 \\ &\quad + (-\tfrac{1}{3}\ c_2^3 - \tfrac{1}{3}\ c_1^3 - \tfrac{1}{6}\ c_0^3)\ c_3^2 + (-\tfrac{2}{3}\ c_2^4 + (-\tfrac{2}{3}\ c_1 - \tfrac{1}{3}\ c_0)\ c_2^3 + (-\tfrac{2}{3}\ c_1^3 - \tfrac{1}{3}\ c_0^3)\ c - \tfrac{2}{3}\ c_1^4 \\ &\quad - \tfrac{1}{3}\ c_0\ c_1^3 - \tfrac{1}{3}\ c_0^3\ c_1 - \tfrac{1}{6}\ c_0^4)\ c_3 + (\tfrac{1}{3}\ c_1 + \tfrac{1}{6}\ c_0)\ c_2^4 + (\tfrac{2}{3}\ c_1^2 + \tfrac{2}{3}\ c_0\ c_1 + \tfrac{1}{6}\ c_0^2)\ c_2^3 \\ &\quad + (-\tfrac{1}{3}\ c_1^3 - \tfrac{1}{6}\ c_0^3)\ c_2^2 + (-\tfrac{2}{3}\ c_1^4 - \tfrac{1}{3}\ c_0\ c_1^3 - \tfrac{1}{3}\ c_0^3\ c_1 - \tfrac{1}{6}\ c_0^4)\ c_2 + \tfrac{1}{6}\ c_0\ c_1^4 + \tfrac{1}{6}\ c_0^2\ c_1^3 \\ &\quad - \tfrac{1}{6}\ c_0^3\ c_1 c_1^2 - \tfrac{1}{6}\ c_0^4\ c_1.\end{aligned}$$

Après réduction, on obtient c_0 comme racine d'un polynôme irréductible de degré 39, lequel admet 3 racines réelles,

$$\begin{aligned}&c_0^{39} + 4\ c_0^{38} - 18\ c_0^{37} - \tfrac{232}{3}\ c_0^{36} + \tfrac{6469}{45}\ c_0^{35} + \tfrac{8108}{15}\ c_0^{34} - \tfrac{82144}{135}\ c_0^{33} - \tfrac{239008}{135}\ c_0^{32} + \tfrac{870652}{675}\ c_0^{31} + \\ &\quad \tfrac{5898416}{2025}\ c_0^{30} - \tfrac{618824}{675}\ c_0^{29} - \tfrac{5158016}{2025}\ c_0^{28} + \tfrac{2525372}{30375}\ c_0^{27} + \tfrac{32135888}{30375}\ c_0^{26} - \tfrac{1377776}{10125}\ c_0^{25} - \\ &\quad \tfrac{33361568}{91125}\ c_0^{24} + \tfrac{536566}{10125}\ c_0^{23} + \tfrac{35651416}{455625}\ c_0^{22} - \tfrac{19660868}{1366875}\ c_0^{21} - \tfrac{8051504}{455625}\ c_0^{20} + \tfrac{5636474}{1366875}\ c_0^{19} + \\ &\quad \tfrac{11313208}{4100625}\ c_0^{18} - \tfrac{17674448}{20503125}\ c_0^{17} - \tfrac{8733536}{20503125}\ c_0^{16} + \tfrac{1302268}{6834375}\ c_0^{15} + \tfrac{87632}{2460375}\ c_0^{14} - \tfrac{624184}{20503125}\ c_0^{13} + \\ &\quad \tfrac{288448}{922640625}\ c_0^{12} + \tfrac{3333844}{922640625}\ c_0^{11} - \tfrac{716752}{922640625}\ c_0^{10} - \tfrac{127664}{553584375}\ c_0^{9} + \tfrac{143264}{922640625}\ c_0^{8} - \\ &\quad \tfrac{136499}{4613203125}\ c_0^{7} - \tfrac{19996}{8303765625}\ c_0^{6} + \tfrac{117142}{41518828125}\ c_0^{5} - \tfrac{33848}{41518828125}\ c_0^{4} + \tfrac{17431}{124556484375}\ c_0^{3} - \\ &\quad \tfrac{9668}{622782421875}\ c_0^{2} + \tfrac{656}{622782421875}\ c_0 - \tfrac{64}{1868347265625},\end{aligned}$$

et $c_1 = P_1(c_0), c_2 = P_2(c_0), c_3 = P_3(c_0)$ où P_1, P_2, P_3 sont des polynômes de degré 38 (ce résultat est obtenue en 20' de temps C.P.U., sur une machine IBM Risc6000, avec Axiom). On a ainsi obtenu toutes les solutions possibles pour les intégrateurs réversibles d'ordre 6, puisqu'on sait qu'il y a au plus 39 solutions. Les intégrateurs obtenus sont produits de 15 opérateurs élémentaires.

• De cette manière, Yoshida a trouvé, en utilisant des méthodes numériques, un intégrateur d'ordre 8 avec $n = 7$, c'est-à-dire comme produit de 15 intégrateurs S_2 ou 31 opérateurs d'ordre 1 : S_A et S_B. On a pu vérifier que ceux-ci ne sont pas produit réversible d'intégrateurs d'ordre 4, ce qui aurait fait également 31 termes.

⋆⋆⋆

On peut appliquer les mêmes méthodes, en cherchant des intégrateurs réversibles comme produit réversible d'intégrateurs d'ordre 4. La technique est la même et consiste à chercher K sous la forme

$$K^{(n)} = k_{1,1}^{(n)} K_{1,1} + k_{5,1}^{(n)} K_{5,1} + k_{7,1}^{(n)} K_{7,1} + k_{7,2}^{(n)} K_{7,2} + \cdots. \tag{20.14}$$

On calcule tout d'abord la base de Lyndon :

$K_{1,1} = k_1,$

$K_{5,1} = k_5,$

$K_{7,1} = k_7,\ K_{7,2} = [k_1, [k_1, k_5]],$

$K_{9,1} = k_9,\ K_{9,2} = [k_1, [k_1, k_7]],\ K_{9,3} = [k_1, [k_1, [k_1, [k_1, k_5]]]]$

On trouve les relations entre les $k_{i,j}^{(n)}$ à l'ordre 9 :

$k_{1,1}^{(n+1)} = k_{1,1}^{(n)} + 2\ c_n,$

$k_{5,1}^{(n+1)} = k_{5,1}^{(n)} + 2\ c_n^5,$

$k_{7,1}^{(n+1)} = k_{7,1}^{(n)} + 2\ c_n^7,$

$k_{7,2}^{(n+1)} = k_{7,2}^{(n)} + (-\frac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \frac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{5,1}^{(n)} + \frac{1}{6}\ c_n^5\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \frac{1}{6}\ c_n^6\ k_{1,1}^{(n)},$

$k_{9,1}^{(n+1)} = k_{9,1}^{(n)} + 2\ c_n^9,$

$k_{9,2}^{(n)} = k_{9,2}^{(n)} + (-\frac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \frac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{7,1}^{(n)} + \frac{1}{6}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \frac{1}{6}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)},$

$k_{9,3}^{(n+1)} = k_{9,3}^{(n)} + (-\frac{1}{6}\ c_n\ k_{1,1}^{(n)} - \frac{1}{6}\ c_n^2)\ k_{7,2}^{(n)} + (\frac{1}{360}\ c_n\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 + \frac{1}{45}\ c_n^2\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 + \frac{7}{180}\ c_n^3\ k_{1,1}^{(n)}$

$\quad + \frac{7}{360}\ c_n^4)\ k_{5,1}^{(n)} - \frac{1}{360}\ c_n^5\ {k_{1,1}^{(n)}}^4 - \frac{1}{45}\ c_n^6\ {k_{1,1}^{(n)}}^3 - \frac{7}{180}\ c_n^7\ {k_{1,1}^{(n)}}^2 - \frac{7}{360}\ c_n^8\ k_{1,1}^{(n)}.$

• Pour $k = 6$, on trouve une solution avec $n = 2$: $c_0 + 2c_1 = 1, c_0^5 + 2c_1^5 = 0$, c'est-à-dire

$$c_0 = \frac{1}{2-\sqrt[5]{2}}, c_1 = \frac{\sqrt[5]{2}}{2-\sqrt[5]{2}}. \tag{20.15}$$

• Pour $k = 8$ et $n = 3$, la variété des solutions est vide ce qui prouve que l'intégrateur d'ordre 8 trouvé par Yoshida ([61]) n'est pas un produit réversible d'intégrateurs d'ordre 4, ce qui aurait fait également un produit à 31 termes.

⋆⋆⋆

Dans le tableau 3, on donne pour chaque ordre et chaque méthode, le nombre de d'équations polynomiales, le nombre de solutions obtenues avec le nombre d'opérateurs intervenant dans le produit. Dans la première colonne, D signifie *en utilisant la méthode directe (19.35)*, L signifie *en représentant l'opérateur par une transformation de Lie ou une exponentielle (19.37) ou (19.36)*, RL signifie *en cherchant des intégrateurs réversibles représentés par des transformations de Lie et en utilisant la proposition (49))*, S_2 signifie *en cherchant des produits réversibles d'intégrateurs S_2*. Dans la colonne "solutions", lorsqu'il y a deux entiers, le premier est le nombre de solutions et le second, le nombre de solutions réelles.

	Polynômes				**Opérateurs**			**Solutions**		
			Réversibles			Réversibles			Réversibles	
Ordre	D	L	RL	S_2	L	RL	S_2	L	RL	S_2
1	2	2	2		1			1		
2	4	1		1	3	3	3	1		
3	8	2	4		5			3		
					6			∞		
4	16	3		1	7	7	7	5-1	3-1	3-1
5	32	6	6		11 ?			46 ?		
6	64	9		2	≥ 13	15	15		39	39-3
7	128	18	18							
8	256	30		4			31			?-5
9	512	56	56							
10	1024	99		8						

Tableau 3 — Intégrateurs symplectiques —

Par exemple, dans la ligne correspondant à l'ordre 4, le nombre de polynômes définissant les zéros est respectivement 30 polynômes (somme dans la colonne) avec la méthode directe, 8 en utilisant des transformations de Lie, 6 en cherchant des intégrateurs réversibles et 2 si on cherche des produits réversibles de S_2. Dans la même ligne, on trouve des solutions qui fournissent des intégrateurs d'ordre 4 comme produit de 7 opérateurs. On trouve 5 solutions avec les transformations de Lie (1 solution réelle), et 3 avec les autres méthodes. Dans la ligne correspondante à l'ordre 3, il y a 3 intégrateurs produit de 5 opérateurs mais aucun n'est à valeurs réelles, et il y en a une infinité comme produit de 6 opérateurs.

20.2. Nombre supérieur d'opérateurs

On peut généraliser la construction d'intégrateurs symplectiques au cas où h est une somme finie de termes (voir par exemple Suzuki [54]).

Dans cette partie, on cherche des intégrateurs, dans le cas où $h = A + B + C$, en utilisant les algorithmes précédents. De tels intégrateurs pourront se révéler utiles lors de l'étude du mouvement de Kepler perturbé, dont le Hamiltonien peut s'écrire sous la forme précédente en utilisant les variables héliocentriques canoniques de Poincaré (voir 21.1).

On donne une liste exhaustive pour les ordres 2 et 4.

- L'intégrateur d'ordre 1 s'obtient comme

$$S_1(t) = S_A(t)S_B(t)S_C(t). \tag{20.16}$$

- Pour l'intégrateur d'ordre 2, de $S_2(t) = S_B(\frac{t}{2})S_C(t)S_B(\frac{t}{2})$, on déduit l'intégrateur

$$S_2(t) = S_A(\tfrac{t}{2})S_B(\tfrac{t}{2})S_C(t)S_B(\tfrac{t}{2})S_A(\tfrac{t}{2}). \tag{20.17}$$

Si l'on cherche directement la solution sous la forme

$$S_2(t) = S_A(c_1t)S_B(d_1t)S_C(e_1t)\cdots S_A(c_nt)S_B(d_nt)S_C(e_nt), \tag{20.18}$$

on trouve un système d'équations polynomiales pour $n = 3$:

$$\left\{\begin{array}{r} c_3 + c_2 + c_1 - 1 = 0 \\ d_2 + d_1 - 1 = 0 \\ e_2 + e_1 - 1 = 0 \\ (c_3 - c_2 - c_1)\, d_2 + (c_3 + c_2 - c_1)\, d_1 = 0 \\ (c_3 + c_2 - c_1)\, e_2 + (c_3 - c_2 - c_1)\, e_1 = 0 \\ (d_2 - d_1)\, e_2 + (-d_2 - d_1)\, e_1 = 0 \end{array}\right. . \tag{20.19}$$

Le système précédent se réduit à une base standard

$$\left\{\begin{array}{rcl} e_2 + e_1 - 1 & = & 0 \\ (d_1 - 1)\, e_1 - d_1 + \frac{1}{2} & = & 0 \\ c_2\, e_1 + c_1 - \frac{1}{2} & = & 0 \\ (c_1 - \frac{1}{2})\, e_1 - \frac{1}{2}\, c_2 - c_1 + \frac{1}{2} & = & 0 \\ d_2 + d_1 - 1 & = & 0 \\ c_2\, d_1 - c_2 - c_1 + \frac{1}{2} & = & 0 \\ (c_1 - \frac{1}{2})\, d_1 + \frac{1}{2}\, c_2 & = & 0 \\ c_3 + c_2 + c_1 - 1 & = & 0 \\ c_2^2 + (2\, c_1 - 1)\, c_2 + 2\, c_1^2 - 2\, c_1 + \frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right. . \tag{20.20}$$

La dernière équation polynomiale s'écrit comme somme de 2 carrés

$$(c_2 + c_1 - \tfrac{1}{2})^2 + (c_1 - \tfrac{1}{2})^2. \tag{20.21}$$

Les solutions réelles sont donc données par

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_1 = c_3 & = & \frac{1}{2} \\ c_2 & = & 0 \\ d_1 + d_2 & = & 1 \\ e_1 + e_2 & = & 1 \\ (d_1 - 1)e_2 + \frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right. . \tag{20.22}$$

Dans le cas où l'on cherche le moins d'opérateurs possibles, on retrouve l'intégrateur précédent.

• Pour l'intégrateur d'ordre 4, en cherchant des intégrateurs réversibles, on pourrait appliquer la même technique, à savoir, si

$$S_4(t) = S_A(d_2 t) S_B(c_1 t) S_A(d_1 t) S_B(c_0 t) S_A(d_1 t) S_B(c_1 t) S_A(d_2 t) \tag{20.23}$$

où

$$d_2 = \frac{1}{2(\sqrt[3]{2}-1)},\ d_1 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}-1},\ c_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1},\ c_0 = \frac{\sqrt[3]{2}-3}{\sqrt[3]{2}-1}, \tag{20.24}$$

est l'intégrateur d'ordre 4 (20.5), alors

$$S_C(d_2 t) S_4(c_1 t) S_C(d_1 t) S_4(c_0 t) S_C(d_1 t) S_4(c_1 t) S_C(d_2 t) \tag{20.25}$$

est un intégrateur d'ordre 4 pour $h = A + B + C$, qui apparaît comme produit de 25 opérateurs d'ordre 1 : S_A, S_B ou S_C.

Néanmoins, si on utilise le lemme 50, on déduit qu'on peut écrire un opérateur d'ordre 4 comme produit de 3 intégrateurs réversibles d'ordre 2, donc, comme un produit de 13 opérateurs. Plus précisément, on trouve

$$S_A(\tfrac{a}{2}t)S_B(\tfrac{a}{2}t)S_C(at)S_B(\tfrac{a}{2}t)S_A(\tfrac{a+b}{2}t)S_B(\tfrac{b}{2}t)S_C(bt)$$
$$S_B(\tfrac{b}{2}t)S_A(\tfrac{a+b}{2}t)S_B(\tfrac{a}{2}t)S_C(at)S_B(\tfrac{a}{2}t)S_A(\tfrac{a}{2}t).$$

où

$$a = \tfrac{1}{2-\omega_3}, b = -\tfrac{\omega_3}{2-\omega_3}. \tag{20.26}$$

Si on recherche directement tous les intégrateurs réversibles qui s'écrivent comme produit de 13 termes, on doit alors chercher un produit sous la forme

$$S_A(c_nt)S_C(e_nt)S_B(d_nt)\cdots$$
$$S_C(e_1t)S_B(d_1t)S_A(c_0t)S_B(d_1t)S_C(e_1t)\cdots S_B(d_nt)S_C(e_nt)S_A(c_nt).$$

Comme les A, B, C, jouent un rôle symétrique, l'intégrateur précédemment trouvé a nécessité l'utilisation de 9 variables (17 termes, *a priori*) $c_0, c_1 = 0, c_2, d_1, d_2 = 0, d_3, e_1, e_2, e_3$. Si on cherche des intégrateurs avec 9 variables, c'est-à-dire $n = 3$, on obtient une variété de dimension nulle et de degré 12 dont une base standard est

$$e_1 + \tfrac{4887}{100}\, c_0^{11} - \tfrac{3051}{100}\, c_0^{10} - \tfrac{11277}{100}\, c_0^9 + \tfrac{15417}{100}\, c_0^8 - \tfrac{3123}{100}\, c_0^7 - \tfrac{1707}{20}\, c_0^6 + \tfrac{1494}{25}\, c_0^5 + \tfrac{1767}{100}\, c_0^4$$
$$- \tfrac{4461}{100}\, c_0^3 + \tfrac{2823}{100}\, c_0^2 - \tfrac{903}{100}\, c_0 + \tfrac{151}{150} = 0,$$
$$e_2 - \tfrac{8451}{50}\, c_0^{11} + \tfrac{2349}{25}\, c_0^{10} + \tfrac{19071}{50}\, c_0^9 - \tfrac{12708}{25}\, c_0^8 + \tfrac{2727}{25}\, c_0^7 + \tfrac{2811}{10}\, c_0^6 - \tfrac{9873}{50}\, c_0^5 - \tfrac{2691}{50}\, c_0^4$$
$$+ \tfrac{3714}{25}\, c_0^3 - \tfrac{2402}{25}\, c_0^2 + \tfrac{1519}{50}\, c_0 - \tfrac{323}{75} = 0,$$
$$e_3 + \tfrac{2403}{20}\, c_0^{11} - \tfrac{1269}{20}\, c_0^{10} - \tfrac{5373}{20}\, c_0^9 + \tfrac{7083}{20}\, c_0^8 - \tfrac{1557}{20}\, c_0^7 - \tfrac{783}{4}\, c_0^6 + \tfrac{1377}{10}\, c_0^5 + \tfrac{723}{20}\, c_0^4 - \tfrac{2079}{20}\, c_0^3$$
$$+ \tfrac{1357}{20}\, c_0^2 - \tfrac{427}{20}\, c_0 + \tfrac{14}{5} = 0,$$
$$d_3 + \tfrac{2403}{20}\, c_0^{11} - \tfrac{1269}{20}\, c_0^{10} - \tfrac{5373}{20}\, c_0^9 + \tfrac{7083}{20}\, c_0^8 - \tfrac{1557}{20}\, c_0^7 - \tfrac{783}{4}\, c_0^6 + \tfrac{1377}{10}\, c_0^5 + \tfrac{723}{20}\, c_0^4 - \tfrac{2079}{20}\, c_0^3$$
$$+ \tfrac{1357}{20}\, c_0^2 - \tfrac{427}{20}\, c_0 + \tfrac{14}{5} = 0,$$
$$d_2 - \tfrac{2403}{20}\, c_0^{11} + \tfrac{1269}{20}\, c_0^{10} + \tfrac{5373}{20}\, c_0^9 - \tfrac{7083}{20}\, c_0^8 + \tfrac{1557}{20}\, c_0^7 + \tfrac{783}{4}\, c_0^6 - \tfrac{1377}{10}\, c_0^5 - \tfrac{723}{20}\, c_0^4 + \tfrac{2079}{20}\, c_0^3$$
$$- \tfrac{1357}{20}\, c_0^2 + \tfrac{437}{20}\, c_0 - \tfrac{33}{10} = 0,$$
$$d_1 - \tfrac{1}{2}c_0 = 0,$$
$$c_2 + \tfrac{8451}{50}\, c_0^{11} - \tfrac{2349}{25}\, c_0^{10} - \tfrac{19071}{50}\, c_0^9 + \tfrac{12708}{25}\, c_0^8 - \tfrac{2727}{25}\, c_0^7 - \tfrac{2811}{10}\, c_0^6 + \tfrac{9873}{50}\, c_0^5 + \tfrac{2691}{50}\, c_0^4$$
$$- \tfrac{3714}{25}\, c_0^3 + \tfrac{2402}{25}\, c_0^2 - \tfrac{747}{25}\, c_0 + \tfrac{571}{150} = 0,$$
$$c_1 - \tfrac{8451}{50}\, c_0^{11} + \tfrac{2349}{25}\, c_0^{10} + \tfrac{19071}{50}\, c_0^9 - \tfrac{12708}{25}\, c_0^8 + \tfrac{2727}{25}\, c_0^7 + \tfrac{2811}{10}\, c_0^6 - \tfrac{9873}{50}\, c_0^5 - \tfrac{2691}{50}\, c_0^4$$
$$+ \tfrac{3714}{25}\, c_0^3 - \tfrac{2402}{25}\, c_0^2 + \tfrac{1519}{50}\, c_0 - \tfrac{323}{75} = 0,$$
$$c_0^{12} - c_0^{11} - 2\, c_0^{10} + 4\, c_0^9 - 2\, c_0^8 - \tfrac{4}{3}\, c_0^7 + \tfrac{17}{9}\, c_0^6 - \tfrac{2}{9}\, c_0^5 - c_0^4 + \tfrac{26}{27}\, c_0^3 - \tfrac{4}{9}\, c_0^2 + \tfrac{1}{9}\, c_0 - \tfrac{1}{81} = 0.$$

On remarque les relations

$$d_3 = e_3, d_1 = \tfrac{1}{2}c_0, c_1 = e_2. \tag{20.27}$$

Le dernier polynôme se factorise en

$$(c_0^9 - 2\, c_0^8 + c_0^7 + \tfrac{2}{3}\, c_0^6 - c_0^5 + \tfrac{2}{3}\, c_0^3 - \tfrac{5}{9}\, c_0^2 + \tfrac{2}{9}\, c_0 - \tfrac{1}{27})(c_0^3 + c_0^2 - c_0 + \tfrac{1}{3}) \tag{20.28}$$

et l'on obtient deux familles de solutions

$$
\begin{gathered}
c_0 = 2e_1 = 2d_1,\\
c_1 = e_2 = d_2 = +27\ c_0^8 - \tfrac{81}{2}\ c_0^7 + \tfrac{9}{2}\ c_0^6 + \tfrac{45}{2}\ c_0^5 - 15\ c_0^4 - 9\ c_0^3 + \tfrac{27}{2}\ c_0^2 - \tfrac{15}{2}\ c_0 + 2,\\
c_2 = d_3 = e_3 = -c_1 - \tfrac{1}{2}c_0 - \tfrac{1}{2},\\
c_0^9 - 2\ c_0^8 + c_0^7 + \tfrac{2}{3}\ c_0^6 - c_0^5 + \tfrac{2}{3}\ c_0^3 - \tfrac{5}{9}\ c_0^2 + \tfrac{2}{9}\ c_0 = \tfrac{1}{27}.
\end{gathered}
$$

et les solutions déja connues

$$
c_1 = e_2 = 0,\ d_2 = d_3 = e_3 = \tfrac{1}{2}c_2 = -\tfrac{1}{4}\ c_0 + \tfrac{1}{4}, d_1 = \tfrac{1}{2}c_0,\ \ e_1 = \tfrac{1}{4}c_0 + \tfrac{1}{4},\ c_0^3 + c_0^2 - c_0 = -\tfrac{1}{3}.
$$

La première famille fournit des intégrateurs comme produit de 17 termes alors que la dernière famille fournit des intégrateurs d'ordre 4 comme produit de de 13 termes. Ceux-ci sont produit de 4 opérateurs S_A, de 6 opérateurs S_B et 3 opérateurs S_C. Comme on peut intervertir les opérateurs, on veillera à utiliser pour B, le Hamiltonien dont le calcul de l'application du flot a le moindre coût.

21. Énergie cinétique particulière

Dans tout ce qui a précédé, on a considéré h comme un Hamiltonien, somme de A et B, sans tenir aucun compte de la forme particulière de A et de B. Dans de nombreux cas, si $h = T(p) + V(q)$, l'énergie cinétique est un polynôme de degré 2 en p. On en déduit alors que $\{T, V\}$ est un polynôme de degré 1 en p et que $\{\{T, V\}, V\} = V_1(q)$ ne dépend que de q, et enfin que

$$
\{\{\{T, V\}, V\}, V\} = 0. \tag{21.1}
$$

Si l'on tient compte de la relation (21.1), on ne trouve pas d'intégrateurs (en tout cas pour les premiers ordres), produit de moins d'opérateurs S_T ou S_V.

Considérons ici au lieu de $S_V(t)$, l'opérateur

$$
S_{\alpha,\beta}(t) = e^{-t(\alpha V + t^2\beta\{\{T,V\},V\})}. \tag{21.2}
$$

On a, comme précédemment

$$
S_{\alpha,\beta}(t)p = p - t\alpha\frac{\partial V}{\partial q} - t^3\beta\frac{\partial}{\partial q}\{\{T, V\}, V\} \quad \text{et} \quad S_{\alpha,\beta}(t)q = q. \tag{21.3}
$$

Cherchons des intégrateurs de la forme

$$
S^{(n)}(t) = S_{c_n,z_n}(t)S_T(d_nt)\cdots S_{c_1,z_1}(t)S_T(d_0t)S_{c_1,z_1}(t)\cdots S_T(d_nt)S_{c_n,z_n}(t) \tag{21.4}
$$

ou, ce qui revient au même, de la forme

$$
S^{(n)}(t) = S_{c_n,z_n}(t)\cdots S_T(d_1t)S_{c_0,z_0}(t)S_T(d_1t)\cdots S_{c_n,z_n}(t). \tag{21.5}
$$

• Pour $n = 1$ et $k = 4$, on trouve les relations

$$
d_0 + 2d_1 = 1,\ 2c_1 = 1,\ (\tfrac{1}{2}d_0^2 - d_1d_0 - d_1^2)c_1 = 0,\ 2z_1 + (-\tfrac{1}{2}d_0 + 2d_1)c_1^2 = 0, \tag{21.6}
$$

qui admettent comme solution

$$
z_1 + \tfrac{3}{8}d_1 = \tfrac{1}{16},\ c_1 = \tfrac{1}{2},\ d_0 + 2d_1 = 1,\ d_1^2 - d_1 = -\tfrac{1}{6}, \tag{21.7}
$$

ou

$$2d_1 = 1,\ c_0 + 2c_1 = 1,\ (-\tfrac{1}{2}c_0 + 2\ c_1)d_1^2,\ 2z_1 + z_0 + (\tfrac{1}{2}c_0^2 - c_1c_0 - c_1^2)d_1, \tag{21.8}$$

qui admettent pour solution générale

$$z_1 + \tfrac{1}{2}z_0 + \tfrac{1}{48} = 0, d_1 - \tfrac{1}{2} = 0, c_0 - \tfrac{2}{3} = 0, c_1 - \tfrac{1}{6} = 0. \tag{21.9}$$

On peut alors prendre la seconde solution

$$z_1 = 0,\ z_0 = -\tfrac{1}{24},\ d_1 = \tfrac{1}{2},\ c_0 = \tfrac{2}{3},\ c_1 = \tfrac{1}{6}. \tag{21.10}$$

S_4 est le produit d'un opérateur $S_{\alpha,\beta}$, de deux opérateurs S_T, de deux opérateurs S_V, soit au total 5 opérateurs. À chaque pas il est nécessaire d'effectuer 6 évaluations, ce qui représente un progrès par rapport aux 7 évaluations trouvées dans le cas général.

• Pour $k = 6$, on trouve de la même façon, avec $n = 2$:

$$z_2 = 0, z_1 - \tfrac{15}{16}c_2^2 + \tfrac{1}{4}\ c_2 - \tfrac{1}{96} = 0, z_0 - \tfrac{3}{8}c_2^2 - \tfrac{1}{4}\ c_2 + \tfrac{1}{48} = 0, d_2 + 3c_2 - \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$d_1 - 3c_2 = 0, c_0 - 30c_2^2 + 12c_2 - 1 = 0, c_1 + 15c_2^2 - 5c_2 = 0, c_2^3 - \tfrac{1}{2}c_2^2 + \tfrac{1}{18}c_2 - \tfrac{1}{540} = 0.$$

L'intégrateur d'ordre 6 est un produit de 9 opérateurs (au lieu de 15) et chaque pas se calcule après 12 évaluations.

⁂

Si $T(p) = \sum_{i,j=1}^n t_{i,j}p_ip_j$, on a $\{T, V\} = \sum_{i,j=1}^n t_{i,j}p_i\frac{\partial V}{\partial q_j} + p_j\frac{\partial V}{\partial q_i}$ et

$$\{\{T, V\}, V\} = 2\sum_{i,j=1}^n t_{i,j}\frac{\partial V}{\partial q_j}\frac{\partial V}{\partial q_i} = 2T(\nabla V). \tag{21.11}$$

21.1. Intégrateur pour le problème du mouvement de Kepler perturbé

Les intégrateurs symplectiques peuvent montrer leur efficacité dans le problème de Kepler perturbé (cf. par exemple, Wisdom [59], Channel & Scovel [9, 10]).

On peut se reporter à [37] pour les détails qui suivent. On s'intéresse au problème de $n+1$-corps. Notant G le barycentre des $n+1$ corps, u_i les vecteurs positions par rapport à G et $\Delta_{i,j} = \|u_i - u_j\|$, le Hamiltonien du système s'écrit classiquement comme

$$H = T + U = \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^n m_i\,\|\dot{u}_i\|^2 - G\sum_{0\le i<j\le n}\tfrac{m_im_j}{\Delta_{i,j}}. \tag{21.12}$$

Posant $\tilde{u}_i = m_i\dot{u}_i$, le moment conjugué de u_i, on obtient dans les coordonnées canoniques

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^n \frac{\|\tilde{u}_i\|}{m_i}. \tag{21.13}$$

L'idée est d'utiliser les variables héliocentriques canoniques : $r_0 = u_0, r_i = u_i - u_0$. Pour que la transformation soit canonique, on pose

$$\tilde{r}_0 = \sum_{i=0}^n u_i = 0, \tilde{r}_i = \tilde{u}_i, \quad 1 \le i \le n \tag{21.14}$$

soit

$$\tilde{u}_0 = -\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i, \tilde{u}_i = \tilde{r}_i, \quad 1 \le i \le n. \tag{21.15}$$

Dans les coordonnées héliocentriques, on a alors

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\|\tilde{r}_i\|^2}{m_i} + \tfrac{1}{2}\frac{\|\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i\|^2}{m_0} && (21.16)\\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\tilde{r}_i\|^2 \left[\tfrac{1}{m_i}+\tfrac{1}{m_0}\right] + \sum_{0<i<j} \frac{\tilde{r}_i.\tilde{r}_j}{m_0} && (21.17)\end{aligned}$$

et

$$U = -G\sum_{i=1}^{n} \frac{m_0 m_i}{r_i} - G\sum_{0<i<j\leq n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}}. \tag{21.18}$$

On peut alors écrire $H = H_0 + H_1$ avec $H_0 = T_0 + U_0$, $H_1 = T_1 + U_1$ où H_0 apparaît comme une somme de problèmes à deux corps et H_1, comme une perturbation d'interaction. On aura

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \|\tilde{r}_i\|^2 \left[\tfrac{1}{m_i}+\tfrac{1}{m_0}\right], U_0 = -G\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0 m_i}{r_i} \tag{21.19}$$

$$T_1 = \sum_{0<i<j} \frac{\tilde{r}_i.\tilde{r}_j}{m_0}, U_1 = -G\sum_{0<i<j\leq n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{i,j}}. \tag{21.20}$$

H_1 a une forme particulièrement simple puisque l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont découplées. H_0 peut s'interpréter comme n Hamiltoniens de mouvements kepleriens de corps de masse $\frac{m_0 m_i}{m_0+m_i}$ autour d'un centre fixe de masse $m_0 + m_i$.

En écrivant $H = H_0 + T_1 + U_1$, où T_1 a une forme particulièrement simple à intégrer, on peut tenter d'intégrer numériquement H en utilisant l'intégrateur d'ordre 4, où S_{T_1} est utilisé 6 fois, S_{U_1}, 4 fois, et S_{H_0}, le Hamiltonien de n problèmes kepleriens à deux corps, 3 fois.

L'interprétation est la suivante : les n corps gravitent autour du corps central. S_{H_0} représente la gravitation des n corps, indépendamment autour du corps central. S_{T_1} revient à modifier les vitesses, et S_{U_1} les positions, subrepticement. Comme s'il fallait les remettre sur le droit chemin.

On a finalement donné dans cette partie une liste exhaustive des intégrateurs symplectiques jusqu'à l'ordre 4. Certains étaient déjà connus sauf 2 intégrateurs d'ordre 4 à valeur complexe et deux intégrateurs d'ordre 3. À l'ordre 5, il semble qu'il y ait des solutions non réversibles (46) obtenues comme produit de 11 opérateurs. Il n'y a pas d'intégrateurs d'ordre 6, produit de moins de 13 termes. Tous les intégrateurs réversibles ont été trouvés. Il y en a 39 exactement, s'écrivant comme produit de 15 opérateurs. Trois sont réels et étaient connus de Yoshida ([61]).

On a montré que les différentes méthodes de recherche des intégrateurs étaient algébriquement équivalentes.

Dans le cas où le Hamiltonien est la somme d'une énergie cinétique de degré 2 et d'une énergie potentielle, on a apporté des améliorations aux résultats précédents.

On a donné une liste exhaustive des intégrateurs réversibles lorsque le Hamiltonien s'écrit comme la somme de 3 termes, ce qui est le cas pour le Hamiltonien du problème du mouvement de Kepler perturbé.

Chapitre VI
Implantations

Dans cette partie sont décrites les diverses implantations des algorithmes cités dans les parties précédentes. Le langage de calcul formel utilisé est Axiom (NAG) ou Scratchpad (prototype d'Axiom). Certains algorithmes ont été réalisés en Scratchpad en 1989 et n'ont pas encore été portés en Axiom.

Tout d'abord, on décrit les implantations des algorithmes propres aux algèbres de Lie libre, c'est-à-dire, principalement, les décompositions sur les bases. On propose d'ailleurs deux représentations pour les éléments du magma, la représentation en arbre ou la représentation par une liste ce qui permet de considérer l'ordre de la base de Hall comme un ordre lexicographique.

On évoque ensuite les implantations réalisées pour exprimer les relations entre les générateurs des diverses transformations de Lie. Il est à noter que ces questions intéressent depuis longtemps les physiciens-opticiens et, en particulier, l'équipe de Dragt, puisqu'il existe déjà un logiciel (MARYLIE) qui calcule des identités exponentielles dans le cadre de la composition de transformations de Dragt-Finn, lesquelles sont utilisées, par exemple, en optique.

On décrira ensuite un ensemble de fonctions implantées pour calculer des intégrateurs symplectiques.

Enfin, on évoque divers paquetages et domaines créés pour calculer des formes normales dans certains cas, en particulier lorsque le Hamiltonien perturbé s'écrit comme une série de polynômes ou dans les coordonnées action-angles. Certains cas non-autonomes peuvent être traités également. Pour ce faire on aura dû créer un domaine des séries de Poisson à une ou plusieurs variables.

22. Axiom en quelques lignes

Ces quelques lignes, pour présenter très succinctement, le système de calcul formel Axiom. Le lecteur est invité à lire la documentation officielle ([30]), la première partie de la thèse de M. Petitot [45], ou l'article de D. Pinchon [46]. Axiom est la version commerciale, distribuée par NAG, du système prototype de calcul formel Scratchpad II. Scratchpad II a été développé à partir des années 70 au centre de recherche d'IBM à Yorktown Heights.

Axiom est un système de calcul formel fortement typé. Les objets manipulés par le système ont tous un nom, une valeur et un type. Les objets de même type appartiennent tous au même domaine. Les domaines sont construits à partir de catégories.

Une catégorie est définie par un ensemble d'opérations données par leur signature, un ensemble de propriétés (attributs), et est éventuellement paramétrée par d'autres catégories. Un contrôle sémantique de l'utilisation des types est alors possible.

Par exemple la catégorie *Ring* des anneaux est la donnée d'un ensemble et de deux opérations, l'addition et la multiplication. La multiplication n'est pas forcément commutative mais la catégorie *CommutativeRing* possède cet attribut supplémentaire. La catégorie des matrices carrées de taille fixe est paramétrée par la catégorie des anneaux (correspondant à l'anneau de base), et par un entier de type *NonNegativeInteger*. Cette catégorie possède les propriétés de base d'un anneau unitaire et possède une application *determinant* lorsque l'anneau de base est commutatif. Avec la nouvelle version d'Axiom, il est possible d'implanter par défaut certaines fonctions, l'implantation ne présageant pas, alors, de la représentation utilisée dans les domaines.

Un domaine défini comme étant de catégorie *Ring* (tout domaine appartient à une catégorie) possède par conséquent une addition et une multiplication et toutes les propriétés de la catégorie. Si la catégorie avait été *CommutativeRing*, le domaine aurait été commutatif. Il est néanmoins possible d'ajouter des opérations spécifiques à chaque domaine. L'héritage (la partie dépendant de la catégorie) ainsi que les opérations et les attributs spécifiques forment communément ce qu'on appelle la partie publique du domaine. La partie privée du domaine est essentiellement l'implantation des algorithmes, une fois choisie la représentation interne des objets. Les domaines eux-mêmes peuvent être paramétrés par d'autres domaines.

Axiom possède donc une bibliothèque de domaines et de catégories directement accessibles par l'utilisateur. En plus de ceux-ci, un certains nombres de paquetages (*package*) contiennent des fonctions qui n'ont pas été implantées au niveau de la définition des domaines parce que trop particulières ou faisant intervenir plusieurs domaines. Par exemple, le paquetage *COMBINAT* contient un certain nombre de fonctions utilisées en combinatoire entière. Bien que ce ne soit pas officiellement inclus dans la version actuellement disponible, on peut également, (c'est ce que nous ferons) utiliser le compilateur, pour créer ses propres catégories, domaines et paquetages.

23. Monômes de Lie

En vue de l'implantation, en Axiom, d'un domaine des algèbres de Lie libres, il faut tenir compte de plusieurs aspects. La notion d'héritage en Axiom permet de n'implanter que les algorithmes typiques au domaine considéré, ou dépendant fortement de la structure des données employée.

Pour implanter un domaine d'algèbres de Lie, il est nécessaire de tenir compte en premier lieu du fait qu'une algèbre de Lie libre sur un alphabet X, à coefficients dans un anneau R est avant tout une algèbre sur R et un module libre sur R à support dans le magma $M(X)$. Ces notions ne dépendent pas de la base choisie pour représenter les polynômes de Lie. On adopte le parti d'implanter tout d'abord la catégorie des algèbres de Lie libres.

Un problème qui apparaît immédiatement, est de savoir si chaque algèbre de Lie libre de la catégorie définie, est un module à support dans le magma, ou un module à support dans chacune des bases possibles, qui sont des sous-ensembles du magma. Il semble clair que, avant toute chose, il soit nécessaire d'implanter le domaine des magmas qui sera paramétré par l'alphabet X.

Doit-on définir les bases de Lyndon ou de Hall comme des sous-ensembles du magma ? On pourrait définir une catégorie des sous-magmas dont les domaines pourraient être le magma $M(X)$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ et d'autres encore, chacun de ces domaines étant muni des opérations élémentaires dont nous avons besoin.

23.1. Magma

Indépendamment de toute représentation des données, les opérations élémentaires à considérer sur le magma sont :

— les opérations de comparaison et la définition d'une relation d'ordre,

— le calcul de la longueur et l'opération de déparenthésage,

— l'obtention des facteurs gauche et droit,

— un morphisme d'évaluation ou de substitution; par exemple, la substitution dans $[[a,b],[b,c]]$ de $\{[a,b],c\}$ par $\{[[a,b],c],[a,b]\}$ sera

$$[[[a,b],c],[b,[a,b]]].$$

Les trois dernières opérations sont propres au magma. Par contre les relations d'ordre sont propres aux bases considérées. L'ordre lexicographique n'est pas une relation d'ordre total sur le magma ($[a,[b,c]]$ et $[[a,b],c]$ ne sont pas comparables), contrairement à la relation d'ordre utilisée pour la base de Hall.

De plus $M(X)$ a une structure de monoïde ce que n'ont pas les bases de Hall et de Lyndon, puisque le produit parenthésé de deux éléments de la base n'appartient pas à la base.

Il m'a semblé donc plus simple, de définir le magma $M(X)$, comme un domaine qui soit à la fois un ensemble ordonné et qui contienne X, muni des opérations de base suivantes :

```
 MG SE: ORDSET  is a domain constructor
 Abbreviation for Magma is MG
 This constructor is exposed in this frame.
 Issue )edit magma.spad to see algebra source code for MG

------------------------------- Operations --------------------------
 ?*? : ($,$) -> $                      ?<? : ($,$) -> BOOLEAN
 ?=? : ($,$) -> BOOLEAN                ad : $ -> ($ -> $)
 coerce : $ -> LIST SE                 coerce : SE -> $
 coerce : $ -> OUTFORM                 eval : ($,LIST SE,LIST $) -> $
 eval : ($,LIST $,LIST $) -> $         hall : ($,$) -> BOOLEAN
 left : $ -> $                         length : $ -> INT
 lexico : ($,$) -> BOOLEAN             lexicoInv : ($,$) -> BOOLEAN
 lvar : $ -> LIST SE                   max : ($,$) -> $
 min : ($,$) -> $                      retract : $ -> SE
 right : $ -> $                        signature : $ -> LIST SE
 signatureOrder : ($,$) -> BOOLEAN
 retractIfCan : $ -> Union(SE,"failed")
```

Une partie de ces opérations sont héritées de la catégorie `OrderedSet`

```
 OrderedSet is a category constructor.
 Abbreviation for OrderedSet is ORDSET

------------------------------ Operations ------------------------

 ?<? : ($,$) -> BOOLEAN                ?=? : ($,$) -> BOOLEAN
 coerce : $ -> OUTFORM                 max : ($,$) -> $
 min : ($,$) -> $
```

et de la catégorie `RetractableTo`

```
 RETRACT S: OBJECT  is a category constructor
 Abbreviation for RetractableTo is RETRACT

------------------------------ Operations ------------------------
 coerce : S -> $                       retract : $ -> S
 retractIfCan : $ -> Union(S,"failed")
```

Il peut être intéressant de pouvoir énumérer les éléments de $\mathcal{H}$ ou $\mathcal{L}$ de longueur bornée, mais la connaissance de ceux-ci ne nous intéresse pas pour la manipulation des polynômes de Lie.

23.2. Représentation des monômes par des arbres binaires

La représentation classique d'un monôme de Lie, c'est-à-dire d'un mot parenthésé, est la structure d'arbre binaire. Cette structure permet d'effectuer naturellement les opérations usuelles, telles que le produit, la recherche du facteur gauche ou droit. Pour ce qui est du calcul de la longueur, de l'ordre de Hall, de l'ordre lexicographique sur le mot déparenthésé, une définition récursive est simple à implanter. C'est ce qui a été fait lors de la première version.

Ayant défini le Magma $M(X)$ comme un ensemble ordonné et contenant l'alphabet `SE` par la commande

```
)abbrev domain LMS LieMonomSorted
```

`++` Ici on définit l'abréviation `LMS` pour le domaine

```
LieMonomSorted(SE:OrderedSet): Export == Implement where
      LSE ==> List SE
      I ==> Integer
      O ==> OutputForm
      B ==> Boolean
      NNI ==> NonNegativeInteger
```

`++` On déclare `LieMonomSorted` comme dépendant d'un ensemble ordonné `SE`. On introduit un certain nombre d'abréviations. La première ligne exprime le fait que la catégorie dont dépend le domaine est définie par `Export` et que les déclarations de fonctions locales au domaine seront déclarées et implantées dans `Implement`.

```
      Export == Join(OrderedSet,RetractableTo SE) with
```

`++` On a défini `Export`. Le domaine est, à la fois, un ensemble ordonné, contient `SE`, et possède une coercition vers `SE`.

```
    lvar   : $ -> LSE
    "*"    : ($,$) -> $
    lex    : ($,$) -> B
    lexinv : ($,$) -> B
    hall   : ($,$) -> B
    length : $ -> I
    coerce : SE -> $
    coerce : $ -> LSE
    left   : $ -> $
    right  : $ -> $
    signature : $ -> LSE
    eval   : ($,List $,List $) -> $
  Implement == add
```

++ On déclare les fonctions et leurs signatures (le signe dollar désigne le domaine lui-même).

Le choix de la représentation des données se fait ensuite par la commande

```
RC :=Record(left:$,right:$)
Rep:=Union(SE,RC)
```

++ qui indique qu'un élément du domaine est, soit un élément de l'alphabet, soit un enregistrement à deux champs (`left` et `right`) qui sont des éléments du domaine. `Rep` est un mot-clé, réservé pour désigner la représentation interne.

L'implantation des algorithmes peut alors commencer.

— `length` renvoie la longueur d'un monôme et est naturellement définie comme suit.

```
length(x) ==
   x case RE => 1$I
   x case RC => length(x.left) + length(x.right)
```

— `left` et `right` retournent respectivement le facteur gauche et droit, lorsque c'est possible, ou un message d'erreur. Par exemple, `right` a pu être implanté comme suit.

```
left(x) ==
  x case RC => x.left
  x case SE => error "n'est que de longueur 1"
```

— `x*y` retourne le produit de x et de y et est naturellement implanté comme suit.

```
x*y == [x,y]$RC
```

— `coerce(x):LSE` renvoie le mot déparenthésé correspondant, sous forme de liste de feuilles. La définition récursive est immédiate.

```
coerce(x):LSE ==
   x case SE => construct(x)$LSE
   x case RC => append(coerce(left x),coerce(right x))
```

— A partir de la fonction de déparenthésage, on peut redéfinir l'ordre lexicographique (celui d'Axiom sur les listes ne convient pas), on peut également exhiber la liste des lettres intervenants dans le monôme ou la `signature` (évaluation commutative du multi-degré), utile pour raffiner l'ordre lexicographique sur les mots de Lyndon, puisque les relations de dépendance entre monômes de Lie ne font intervenir que des monômes de même signature. Cette fonction peut être implantée par

```
signature(x) ==
  x case SE => construct(x)$LSE
  x case RC => sort(append(signature left x,signature right x))
```

— `eval(x,ly,lz)` est le morphisme d'évaluation. `eval(x,ly,lz)` renvoie x, dans lequel tous les monômes de ly qui sont des facteurs de x sont évalués en les monômes de lz correspondants. Cette fonction est implantée de façon récursive et l'on doit supposer qu'il n'y a pas d'ambiguïté.

```
eval(x,ly,lz) ==
   i:=position(x,ly)
   i>0 => lz.i
   x case RC => eval(left x,ly,lz) * eval(right x,ly,lz)
   x case SE => x
```

— `x=y` teste l'égalité de x et de y

```
x=y ==
  (x case SE) and (y case SE) => x:SE =$SE y:SE
  (x case RC) and (y case RC) =>
             left(x)=left(y) and right(x)=right(y)
  false
```

— `coerce(x):O` est la fonction d'affichage et est naturellement définie de façon récursive

```
coerce(x:$): O ==
  x case SE => x::SE::O
  xx:= x::RC
  bracket([xx.left::O,xx.right::O])$O
```

— `coerce(m:SE)` permet d'injecter des lettres de X dans $M(X)$

```
coerce(m:SE):$ == m::SE::Rep
```

— `x<y` teste si $x < y$. On a choisi un ordre total sur les monômes. Cet ordre doit être organisé, de manière à ce que les monômes de moindre longueur soient affichés les premiers dans l'écriture d'un polynôme de Lie. J'ai donc choisi l'ordre de Hall inversé.

```
x<y == hall(y,x)
```

— `hall(x,y)` teste si $x < y$ pour l'ordre de Hall. Une implantation récursive est facile avec

```
hall(x,y) ==
  length x = length y =>
        (x case SE) and (y case SE) => x:SE <$SE y:SE
        (x case RC) and (y case RC) =>
                x.left = y.left => hall(x.right,y.right)
                hall(x.left,y.left)
  length x < length y => true
  false
```

Cette représentation a l'avantage d'être plus naturelle et permet des implantations d'algorithmes de façon plus ou moins aisée. Mais, par exemple, pour la fonction `hall`, un certain nombre de redondances apparaissent et il ne m'a pas paru simple de dérécursifier cet algorithme.

En effet, supposons que x et y aient la même longueur. Pour calculer celle-ci, on a dû calculer les longueurs respectives des sous-arbres gauches et droits. Pour déterminer si $x < y$, on doit alors recalculer les longueurs des sous-arbres gauches de x et de y ce qui a déja été effectué puisqu'on connaît les longueurs totales. Ce processus se répète tant que les longueurs à gauche sont égales. La dérécursification de cet algorithme ne m'étant pas apparue de façon naturelle, il conviendrait d'adopter une autre structure de données.

Pour l'ordre lexicographique, le même genre d'inconvénients apparaît, puisque on effectue une comparaison sur les mots totalement déparenthésés, alors qu'il pourrait suffire de ne connaître que les premières lettres.

23.3. Représentation par listes

L'autre représentation, qui s'est révélée plus efficace, est la suivante. On représente un mot parenthésé u par une liste `lp`(u), correspondant à l'énumération de la longueur des mots sous chaque nœud ou feuille.

Par exemple

— a est représenté par : `(a)`

— $[a, b]$ est représenté par : `(2,a,b)`

— $[a, [b, c]]$ est représenté par : `(3,a,2,b,c)`

— $[[a, b], c]$ est représenté par : `(3,2,a,b,c)`

— $[[a, b], [[c, d], e]]$ est représenté par : `(5,2,a,b,3,2,c,d,e)`

La construction de la représentation se fait de façon automatique de la manière suivante :

— Si $|u| = 1$ alors `lp`$(u) =$`(u)`

— Sinon $u = [u_1, u_2]$ et `lp`$(u) = |u|$ `lp`(u_1)`lp`(u_2)

La longueur de la liste des positions `lp` est le nombre de feuilles et de nœuds de l'arbre, soit $2n - 1$, si n est la longueur du mot.

On peut alors interpréter la liste des positions comme la liste, pour tous les nœuds et les feuilles de l'arbre, du nombre de feuilles sous ceux-ci, les nœuds et les feuilles étant triés de la gauche vers la droite.

PROPOSITION 51. — *L'ordre de Hall est l'ordre lexicographique sur les listes de positions, où $x < n$, pour tout $x \in X$ et tout $1 < n \in \mathbb{N}$.*

Soit à comparer u et v, deux monômes de Lie.

- si $|u| = |v| = 1$ alors `lp`$(u) <$ `lp`$(v) \iff u < v$
- si $|u| \neq |v|$ alors `lp`$(u) <$ `lp`$(v) \iff |u| < |v| \iff u < v$

- sinon, on peut poser $u = [u_1, u_2]$ et $v = [v_1, v_2]$. Dans ce cas

$$\mathtt{lp}(u) < \mathtt{lp}(v) \iff \mathtt{lp}(u_1)\mathtt{lp}(u_2) < \mathtt{lp}(v_1)\mathtt{lp}(v_2)$$

  - si $|u_1| \neq |v_1|$ alors puisque $|u_1|$ et $|v_1|$ sont les premiers éléments des listes à comparer, on a

$$\mathtt{lp}(u) < \mathtt{lp}(v) \iff |u_1| < |v_1| \iff u < v$$

  - si $|u_1| = |v_1|$ alors $\mathtt{lp}(u_1)$ et $\mathtt{lp}(v_1)$ sont de même longueur. Avec les propriétés de l'ordre lexicographique, on a

$$\mathtt{lp}(u) < \mathtt{lp}(v) \iff \begin{cases} \mathtt{lp}(u_1) < \mathtt{lp}(v_1) \\ \quad \text{ou} \\ \mathtt{lp}(u_1) = \mathtt{lp}(v_1) \quad \text{et} \quad \mathtt{lp}(u_2) < \mathtt{lp}(v_2) \end{cases}$$

Dans tous les cas de figure, on a bien la proposition énoncée, puisqu'elle est vraie pour les monômes de longueur 1.

Plutôt que d'utiliser cette unique liste `lp`, qui a l'inconvénient de contenir des éléments de types différents, on utilise plutôt deux listes, `lv` et `lp`, qui sont, pour `lv`, la liste des feuilles, c'est-à-dire, le mot déparenthésé, et pour la seconde, la même liste que `lp` où on aura remplacé les lettres par des 1.

Avec cette représentation, l'ordre de Lyndon est l'ordre lexicographique sur `lv`. Celui de Hall diffère très légèrement, et n'est pas tout a fait l'ordre lexicographique sur `lp`, comme on peut le voir sur l'exemple suivant.

Posons $u = [[a,b],[[c,d],e]]$ et $v = [[a,e],[b,[c,d]]]$. On a $u < v$ pour l'ordre de Hall puisque $|u| = |v|$ et $[a,b] < [a,e]$. Si on utilise la représentation proposée, on a :

— $\mathtt{lv}(u)$ =`(a,b,c,d,e)` et $\mathtt{lp}(u)$ =`(5,2,1,1,3,2,1,1,1)`

— $\mathtt{lv}(v)$ =`(a,e,b,c,d)` et $\mathtt{lp}(v)$ =`(5,2,1,1,3,1,2,1,1)`

donc $\mathtt{lp}(v) < \mathtt{lp}(u)$.

Il faut donc ajouter un test pour différencier les `1` dans les listes `lp`, ce qui est fait en parcourant simultanément les listes `lp` et `lv`.

On implante l'ordre de Hall comme suit :

```
hall(x,y) ==
     lpx:=x.lp
     lpy:=y.lp
     lvx:=x.lv
     lvy:=y.lv
     while ^null lpx and ^null lpy and lpx.1=lpy.1 repeat
         if lpx.1=1 then
             if lvx.1=lvy.1 then
                    lvx:=rest lvx
                    lvy:=rest lvy
             else return lvx.1<lvy.1
         lpx:=rest lpx
         lpy:=rest lpy
     null lpy => false
     null lpx => true
     lpx.1<lpy.1 => true
     false
```

23.3.1. Implémentation

La déclaration de représentation se fait par

```
Rep:=Record(lv:List SE,lp:LP)
```

où `LP` désigne le type `liste d'entiers`.

— `length` est définie de par

```
length x == x.lp.1
```

— `left(x)` et `right(x)` sont également définies simplement, car on sait que le premier élément de `lp` est la longueur de x, le second est la longueur du facteur gauche, et la longueur de `lp` est $2\,|x| - 1$.

```
left x ==
   [first(x.lv,x.lp.2::NNI),rest first(x.lp,2*(x.lp.2::NNI))]

right x ==
   [rest(x.lv,x.lp.2::NNI),rest(x.lp,2*(x.lp.2::NNI))]
```

— `x*y` s'effectue par concaténation de listes et ajout en tête de `lp`, de la longueur de $[x, y]$, c'est-à-dire, de la somme des premiers éléments de `lp(x)` et de `lp(y)`.

```
x*y == [append(x.lv,y.lv),concat(x.lp.1+y.lp.1,append(x.lp,y.lp))]
```

— `x<y` est l'ordre lexicographique sur `lp` puis l'ordre lexicographique sur `lv`. C'est un ordre total

```
x<y ==
     lpx:=x.lp
     lpy:=y.lp
     lvx:=x.lv
     lvy:=y.lv
     while ^null lpx and ^null lpy and lpx.1=lpy.1 repeat
        lpx:=rest lpx
        lpy:=rest lpy
     null lpx and null lpy => lexico(y,x)
     null lpy => true
     null lpx => false
     lpy.1<lpx.1 => true
     false
```

— `x=y` teste l'égalité de x et de y. On compare les liste des feuilles (mots) et la liste des positions (structure)

```
x=y == x.lv=y.lv and x.lp=y.lp
```

— `coerce` transforme une lettre en un mot

```
coerce(v:SE):$ == [[v],[1]]
```

— `coerce` renvoie la liste des feuilles, c'est-à-dire le mot déparenthésé

```
coerce(x):LSE == x.lv
```

— `lvar x` donne la liste des variables qui composent x, ce qui consiste à éliminer les doublons de la liste des feuilles `lv`, et à la trier

```
lvar x == sort(setUnion(x.lv,[]))
```

— `signature x` donne la signature, c'est-à-dire le multi-degré commutatif. C'est un tri sur `lv(x)`

```
signature x == sort(x.lv)
```

— `retractIfCan` teste si $x \in X$ et, le cas échéant, renvoie x comme élément de X

```
retractIfCan x ==
   x.lp.1 = 1 => x.lv.1
   "failed"
```

— `retract x` transforme x en élément de X, ou échoue à l'exécution

```
retract x ==
  if (u:=retractIfCan x) case SE then u
  else error "Pas de longueur 1"
```

— `lexico(x,y)` teste l'ordre lexicographique sur x et y. Cet ordre a été récrit puisque celui implanté par défaut sur les listes ne convenait pas

```
lexico(x,y) ==
     lvx:=x.lv
     lvy:=y.lv
     while ^null lvx and ^null lvy and lvx.1=lvy.1 repeat
         lvx:=rest lvx
         lvy:=rest lvy
     null lvy => false
     null lvx => true
     lvx.1<lvy.1 => true
     false
```

— `eval(x,ly,lz)` évalue le monôme x, en substituant tout facteur dans ly, par l'élément correspondant de lz. Cette fonction a été dérécursifiée en utilisant le procédé suivant. On parcourt la liste `lp(x)` de la gauche vers la droite, et, pour chaque nœud ou feuille, on vérifie si l'arbre sous celui-ci est un élément de `ly`. On construit le résultat progressivement avec `lvr` et `lpr`.

```
eval(x:$,ly:List $,lz:List $) ==
   lvr:=[]
   lpr:=[]
   lvx:=x.lv
   lpx:=x.lp
   while ^null lpx repeat
        n:NNI:=lpx.1 pretend NNI
        lvrx:LSE:=first(lvx,n)
        lprx:LP:=first(lpx,(2*n -1) pretend NNI)
```

```
                    if (i:=position([lvrx,lprx],ly))>0 then
                        lvr:=append(lvr,lz.i.lv)
                        lvx:=rest(lvx,n)
                        lpx:=rest(lpx,(2*n-1) pretend NNI)
                        if ^((k:=lz.i.lp.1 - lprx.1)=0) then
                           nb1:=0
                           lpp:=reverse lpr
                           lpr:=[]
                           while ^null lpp repeat
                             if lpp.1=1 then
                                  nb1:=nb1+1
                                  lpr:=concat(lpp.1,lpr)
                             else
                               if nb1<lpp.1 then lpr:=concat(lpp.1 + k,lpr)
                               else lpr:=concat(lpp.1,lpr)
                             lpp:=rest lpp
                        lpr:=append(lpr,lz.i.lp)
                    else
                        if lpx.1=1 then
                              lvr:=concat(lvr,lvx.1)
                              lvx:=rest lvx
                        lpr:=concat(lpr,lpx.1)
                        lpx:=rest lpx
               [lvr,lpr]
```

— `coerce x` affiche x. La programmation est récursive.

```
coerce(x:$):O ==
   x.lp.1=1 => x.lv.1 :: O
   bracket([coerce left x,coerce right x])
```

On aurait pu dérécursifier cet algorithme mais le gain n'est pas notable, d'autant plus que `coerce` n'est appelé qu'une seule fois pour l'affichage.

Cependant, si on considère la liste des positions, parcourue de la gauche vers la droite, on doit ajouter une parenthèse ouvrante à chaque fois que l'on rencontre un vrai nœud, et la lettre correspondante à chaque fois que l'on rencontre une feuille. Pour placer les parenthèses fermantes, il faut compter le nombre de feuilles qui ont été placées depuis l'apparition du dernier nœud, et en ajouter une, autant de fois que ce nombre de feuilles atteint les valeurs des nœuds précédement visités.

Décrivons, ici, l'algorithme pour lequel on aura adopté la liste des positions où les feuilles sont des lettres et non pas des 1.

`ln :=[]` – liste des noeuds visites
`res :=""` – resultat
pour tous les elements de `lp` **faire**
  si le premier element de `lp` est un nombre p
    ajouter p au debut de `ln`
    ajouter `"("` a la fin de `res`
  sinon le premier element de `lp` est une lettre a
    ajouter a a la fin de `res`

retrancher 1 a tous les elements de `ln`
ajouter autant de `")"` a la fin de `res` qu'il y a de 0 debut de `ln`
enlever tous les `0` de `ln`
renvoyer `res`

23.4. Comparaisons

Comparons la complexité des algorithmes de tris, suivant la représentation utilisée, en arbre ou en liste.

— **longueur**

— *Représentation en arbre*
Pour calculer la longueur de l'arbre de longueur n, il faut

Tester si la racine est une feuille ou non.

Calculer la longueur du sous-arbre gauche et droit et les ajouter.
Le nombre de tests $t(n)$ est donc défini par $t(n) = 1+t(p)+t(q)$ pour $p+q = n$ et $t(1) = 1$. Le nombre d'additions est défini par $a(1) = 0$ et $a(n) = 1+a(p)+a(q)$. On a donc, pour tout n, $t(n) = 2n - 1$ et $a(n) = n - 1$.

— *Représentation en liste*
Il suffit de lire le premier élément de la liste des positions, ce qui coûte un test.

Indépendamment de la taille prise par la pile lors du calcul de la longueur d'un arbre, la différence est criante.

— **Ordre lexicographique**

— *Représentation en arbre*
Tel que l'ordre a été implanté, on commence par chercher toutes les feuilles des arbres, puis on effectue une comparaison lexicographique sur les listes obtenues. Ce calcul coûte, comme précédemment, $2n - 1$ tests de feuilles et $2n$ concaténations de listes. Dans ce cas, le coût est supérieur de ces grandeurs-ci.

On pourrait imaginer de chercher les feuilles, progressivement de la gauche vers la droite, jusqu'à ce qu'on puisse déterminer, lequel des deux arbres, est le plus petit. Mais, dans le pire des cas, la recherche de la première feuille peut coûter $\frac{n}{2}$ tests, si tous les sous-arbres droits des sous-arbres gauches successifs sont de longueur 1.

— *Représentation en liste*
C'est le coût de l'ordre lexicographique sur deux listes.

— **Ordre de Hall**

— *Représentation en arbre*
Si les deux arbres ne sont pas de même longueur, le coût $h(m, n)$ est celui du calcul de la longueur des deux arbres, soit $2(n + m - 1)$ tests de feuilles et $n + m - 2$ additions, si n et m sont les longueurs respectives.
Si les longueurs sont égales il faut comparer les sous arbres gauches et, le cas échéant, les sous arbres droits. Le coût devient, pour les tests de feuilles, $h(n, m) = t(n) + t(m) + h(p_n, p_m) + h(q_n, q_m)$, correspondant au calcul des

longueurs, puis de l'ordre de Hall sur les sous-arbres. Dans le pire des cas (celui de l'égalité par exemple), on a, par récurrence, $h(n,n) = 2t(n) + \sup_{p+q=n}(h(p,p)+h(q,q)) \geq 2t(n)+h(n-1,n-1)+h(1)$. Mais $h(1) = 2$ (il faut calculer les longueurs sur deux feuilles), donc, $h(n,n) \geq h(n-1,n-1)+4n = 2n^2+2n-2$. Pour ce qui est du nombre d'additions résultant du calcul des longueurs, on trouve également un polynôme du second degré et nous n'avons pas compté le nombre de comparaisons de feuilles, qui, de toute façon, intervient également pour la représentation en liste. A chaque étape, il y a comparaison des longueurs, donc $2n-1$ comparaisons d'entiers, ce qui correspond au nombre nœuds.

- *Représentation en liste*
  Avec cette représentation, l'ordre de Hall est l'ordre lexicographique sur la liste des positions et des feuilles. Dans le cas de l'égalité, il y a $2n-1$ comparaisons d'entiers, puis $2(2n-1)$ tests d'égalité à 1 (qui correspondent aux test de feuilles), et les tests de comparaisons sur les feuilles (n). Il n'y a aucune addition.

Outre les additions, il y a un facteur n sur le nombre de tests de feuilles en faveur de la représentation en liste.

- **Égalité**

  - *Représentation en arbre*
    On teste pour chacun des arbres si la racine est une feuille, puis on compare les sous-arbres gauches et les sous-arbres droits ce qui donne un coût linéaire en fonction de la longueur.
  - Représentation en liste
    On teste sur l'égalité de 2 listes, ce qui coûte, compte tenu de la taille des listes, $3n-1$ tests, au plus, si les mots sont égaux de taille n.

  La représentation en liste permet de détecter tout de suite une différence sur les longueurs, alors qu'il est nécessaire, pour la représentation en arbre, de parcourir tout l'arbre.

24. Polynômes de Lie

Ayant à notre disposition un magma dépendant d'un alphabet X, qui est un ensemble ordonné, muni de quelques opérations de base, on peut définir la catégorie des algèbres de Lie libres, comme étant une algèbre sur R, un module libre sur R, à support dans M. Les opérations élémentaires, outre celles qui découlent de l'héritage de la structure d'algèbre et de module libre sont :

- l'accès aux coefficients, aux différents monômes de Lie,
- l'accès aux lettres de l'alphabet intervenant dans celui-ci,
- un morphisme d'évaluation,
- lorsque c'est possible, une factorisation par un monôme de Lie,

— une injection (coercition) de $M(X)$ vers $\mathfrak{L}$.

La plupart de ces opérations de base peuvent être implantées par défaut, au niveau de la catégorie, puisqu'elle ne dépendent, ni de la représentation des données choisie, ni des bases choisies. Cependant, la catégorie des modules libres n'étant pas définie avec Axiom, j'ai plutôt défini L comme étant une algèbre non associative sur R, ce qui me permet de récupérer les opérations de base suivantes :

```
NAALG R: COMRING  is a category constructor
Abbreviation for NonAssociativeAlgebra is NAALG
This constructor is exposed in this frame.
Issue )edit naalgc.spad to see algebra source code for NAALG

------------------------------- Operations --------------------------------
?*? : (R,$) -> $                      ?*? : ($,R) -> $
?*? : ($,$) -> $                      ?*? : (INT,$) -> $
?*? : (NNI,$) -> $                    ?*? : (PI,$) -> $
?**? : ($,PI) -> $                    ?+? : ($,$) -> $
?-? : ($,$) -> $                      ?-? : ($,$) -> Union($,"failed")
-? : $ -> $                           ?=? : ($,$) -> BOOLEAN
0 : () -> $                           antiCommutator : ($,$) -> $
associator : ($,$,$) -> $             coerce : $ -> OUTFORM
commutator : ($,$) -> $               leftPower : ($,PI) -> $
plenaryPower : ($,PI) -> $            rightPower : ($,PI) -> $
zero? : $ -> BOOLEAN
```

L est aussi un élément de la catégorie des Produits Directs Indexés, ce qui me permet d'hériter des opérations propres à la structure de Module libre :

```
IDPC(A: SETCAT,S: ORDSET)  is a category constructor
Abbreviation for IndexedDirectProductCategory is IDPC
This constructor is exposed in this frame.
Issue )edit indexedp.spad to see algebra source code for IDPC

------------------------------- Operations --------------------------
?=? : ($,$) -> BOOLEAN                coerce : $ -> OUTFORM
leadingCoefficient : $ -> A           leadingSupport : $ -> S
map : ((A -> A),$) -> $               monomial : (A,S) -> $
reductum : $ -> $
```

24.1. Domaines des algèbres de Lie

Une base étant choisie, ce qui distingue l'implantation des algorithmes n'est réduit en fait qu'à l'implantation de la relation d'ordre propre à la base et de l'algorithme de multiplication de deux monômes. Les relations d'ordre ont été définies au niveau du magma, c'est-à-dire qu'on a pris le parti de représenter de la même façon, les éléments de la base de Hall et de la base de Lyndon.

La structure naturelle sous-jacente est la structure de Module libre qui existe en Axiom mais la difficulté provient du fait cette structure est une structure de domaine. On a donc, au niveau de la représentation interne, choisi la structure de Module libre sur R à support dans $M(X)$. Les seuls algorithmes à implanter sont, et cela indépendamment des structures de données adoptées pour le magma, la multiplication de deux monômes de base.

Une des grandes forces des algorithmes de multiplication, aussi bien pour la base de Lyndon que pour la base de Hall est qu'il n'est nullement besoin de connaître ces dérnières.

Cependant, la connaissance de bases construites sur un sous-ensemble fini de lettres de l'alphabet peut être intéressant.

24.2. Catégorie des algèbres de Lie libres

On définit, tout d'abord, la catégorie des algèbres de Lie libres et l'on implante par défaut les opérations qui ne dépendent, ni de la base, ni de la représentation interne choisie.

```
 FLA(R: COMRING,SE: ORDSET)  is a category constructor
 Abbreviation for FreeLieAlgebra is FLA
 This constructor is exposed in this frame.
 Issue )edit flac.spad to see algebra source code for FLA

------------------------------- Operations ----------------------------
 ?*? : (MG SE,MG SE) -> $            ?*? : (R,$) -> $
 ?*? : ($,R) -> $                    ?*? : ($,$) -> $
 ?*? : (INT,$) -> $                  ?*? : (NNI,$) -> $
 ?*? : (PI,$) -> $                   ?**? : ($,PI) -> $
 ?+? : ($,$) -> $                    ?-? : ($,$) -> $
 ?-? : ($,$) -> Union($,"failed")    -? : $ -> $
 ?=? : ($,$) -> BOOLEAN              0 : () -> $
 antiCommutator : ($,$) -> $         associator : ($,$,$) -> $
 coerce : SE -> $                    coerce : MG SE -> $
 coerce : $ -> OUTFORM               commutator : ($,$) -> $
 degree : $ -> NNI                   eval : ($,LIST MG SE,LIST $) -> $
 inBasis? : MG SE -> BOOLEAN         leadingCoefficient : $ -> R
 leadingMonomial : $ -> $            leadingSupport : $ -> MG SE
 leftAd : $ -> ($ -> $)              leftDivide : ($,MG SE) -> LIST $
 leftPower : ($,PI) -> $             listOfCoefficient : $ -> LIST R
 listOfMonomials : $ -> LIST MG SE   lvar : $ -> LIST SE
 map : ((R -> R),$) -> $             monomial : (R,MG SE) -> $
 plenaryPower : ($,PI) -> $          reductum : $ -> $
 rightAd : $ -> ($ -> $)             rightDivide : ($,MG SE) -> LIST $
 rightPower : ($,PI) -> $            size : $ -> INT
 zero? : $ -> BOOLEAN
 basis : (LIST SE,NNI) -> LIST LIST MG SE
 boundedBasis : (LIST SE,MG SE,NNI) -> LIST LIST MG SE
 boundedWeightedBasis : (LIST LIST SE,MG SE,NNI) -> LIST LIST MG SE
 eval : ($,LIST MG SE,LIST MG SE) -> $
 mkGenerator? : (MG SE,MG SE) -> BOOLEAN
 weightedBasis : (LIST LIST SE,NNI) -> LIST LIST MG SE
```

Notons que nous avons défini une multiplication sur la magma, à valeur dans l'algèbre de Lie, qui ne sera implantée qu'au niveau de chaque domaine. Ayant défini la catégorie des algèbres de Lie libre par

```
)abbrev category FLA FreeLieAlgebra

FreeLieAlgebra(R:CommutativeRing,SE:OrderedSet): Category ==
Join(NonAssociativeAlgebra(R),IndexedDirectProductCategory(R,Magma SE)) with
    .
    .
    .(liste des fonctions et attributs)
    .
   add
```

on peut commencer l'implantation des algorithmes.

— `coerce m` injecte un élément m de $M(X)$ dans l'algèbre de Lie libre et est implanté récursivement, puisque m n'est pas forcément un élément de la base.

```
coerce(m:Magma SE):$ ==
  retractIfCan m case SE => monomial(1$R,m)
  coerce(left m) * coerce(right m)
```

— `listOfCoefficient`, `listOfMonomials`, `size`, `lvar`, `leadingMonomial` sont des fonctions, qu'on peut définir à partir de `leadingSupport`, `leadingCoefficient` et `reductum`.

— `x*y` est la multiplication. Elle est définie, si il existe une multiplication de deux monômes de base dans l'algèbre de Lie libre.

```
x:$ * y:$ ==
  x=0 or y=0 => 0
  lx:=listOfCoefficient x
  mx:=listOfMonomials x
  ly:=listOfCoefficient y
  my:=listOfMonomials y
  res:$:=0
  for u in lx for a in mx repeat
      for v in ly for b in my repeat
          res:=res + (u*v)*(a*b)
  res
```

Ici, `u*v` désigne la multiplication de deux éléments de l'anneau de base, et `a*b`, la multiplication de deux éléments de base dans l'algèbre. Cette dernière est implantée dans chacun des domaines.

— `leftDivide` et `rightDivide` sont une pseudo-division à gauche ou à droite par un élément du magma considéré comme polynôme de Lie. Ces fonctions retournent un dividende et un reste. Elles sont implantées par défaut, en testant pour chaque monôme, si le facteur gauche ou droit est l'élément du magma recherché. Elles peuvent être éventuellement re-implantées dans chaque domaine de la catégorie.

```
leftDivide(x:$,m:Magma SE) ==
 x=0 => [0,0]
 mx:=listOfMonomials x
 lx:=listOfCoefficient x
 res1:$:=0
 res2:$:=0
 for u in lx for v in mx repeat
  if v=m then res1:=res1+monomial(lx.1,mx.1)
  else if length v = 1 then res2:=res2+monomial(lx.1,mx.1)
       else if left v = m then res1:=res1+monomial(lx.1,right mx.1)
            else if right v = m then
                    res1:=res1 -monomial(lx.1,left mx.1)
                 else res2:=res2+monomial(lx.1,mx.1)
  mx:=rest mx
  lx:=rest lx
[res1,res2]
```

— `leftAd` et `rightAd` désigne l'opérateur adjoint, à gauche et à droite, respectivement. En général on désigne `leftAd` par *ad*.

— Enfin, on implante un certain nombre de fonctions d'évaluations. La première utilise la fonction `eval` du magma, puis la coercition dans l'algèbre de Lie, la seconde utilise une fonction locale `ev`, et est définie récursivement puisqu'on n'a pas accès à la représentation interne des données.

```
eval(x:$,ly:List Magma SE,lz:List Magma SE):$ ==
    x=0 => x
    +/ [u*(eval(v,ly,lz)::$) for u in listOfCoefficient x
                                  for v in listOfMonomials x]

ev(m:Magma SE,ly:List Magma SE,lz:List $):$ ==
    m=1 => m::$
    (i:=position(m,ly))>0 => lz.i
    retractIfCan m case SE => m::$
    ev(left m,ly,lz) * ev(right m,ly,lz)

eval(x:$,ly:List Magma SE,lz:List $):$ ==
    x=0 => x
    +/ [u*ev(v,ly,lz) for u in listOfCoefficient x for
                                     v in listOfMonomials x]
```

Le reste des opérations est, soit hérité des catégories définissant les algèbres de Lie libres, soit implanté au niveau des domaines qui sont les algèbres de Lie libres, munies de différentes bases. Ces opérations ne sont en fait, que la multiplication de deux monômes de base, et l'obtention des éléments de la base, de longueur donnée. L'addition de deux polynômes, qui est héritée de la structure d'algèbre, n'a pas été implantée, car elle dépend de la structure des données.

24.3. Algèbre de Lie libre avec la base de Hall

On définit ce domaine par

```
)abbrev domain HFLA HallFreeLieAlgebra

HallFreeLieAlgebra(R,SE): Export == Implement where
      R:CommutativeRing
      SE:OrderedSet
      LSE ==> List SE
      I ==> Integer
      O ==> OutputForm
      B ==> Boolean
      NNI ==> NonNegativeInteger
      MG ==> Magma(SE)
      FM ==> FreeModule(R,MG)

      Export == FreeLieAlgebra(R,SE)

      Implement == FM add
```

`++` Ce domaine est de la catégorie des `FLA` et, donc, hérite de ses opérations. On a utilisé comme représentation interne, le domaine `FreeModule` pour effectuer toutes les opérations liées à la structure de module. L'implantation de ces dérnières est l'implantation par défaut dans le domaine `FreeModule`.

On définit la multiplication de deux éléments de la base de Hall. En fait, ce sont, *a priori*, des éléments du magma, mais, lors de l'exécution, ce sont nécessairement des éléments de la base de Hall. On utilise une fonction auxiliaire `mult`, ce qui évite des comparaisons quand on sait que $a < b$.

```
a*b ==
  a=b => 0
  hall(b,a) => -mult(b,a)
  mult(a,b)

mult(a,b):$ ==
  length(b)=1 or ^(hall(a,left b)) => monomial(1$R,a*b)
  x:=mult(a,right b)
  bb:=left b
  +/ [u*mult(bb,v) for u in listOfCoefficient x
                    for v in listOfMonomials x]
      - monomial(1$R,right b)*mult(a,bb)
```

On a redéfini la fusion (`union`) de deux listes triées, puisque elle n'est pas correctement implantée dans Axiom. Ceci nous permet de construire les éléments de la base.

— `basis(lx,n)` construit la base de longueur inférieure à n sur l'alphabet lx.

```
basis(lx,n) ==
  l:List List MG:=[[] for i in 1..n]
  l.1 := sort(hall,[u::MG for u in lx])
  for i in 2..n repeat
    for j in 1..(i quo 2) repeat
      k:=(i-j)::NNI
      for u in l.j repeat
        l.i:=union(l.i,[u*v for v in l.k | mkGenerator?(u,v)])
  l
```

— `weightedBasis` construit une base de poids inférieur à n, sur un alphabet pondéré llx, ce qui sera utile par la suite. llx est une liste de listes de lettres de X, de poids croissants. `weightedBasis` renvoie une liste de listes d'éléments, cette fois triés par poids et non par longueur. L'algorithme est le même, mais on a éliminé les éléments de poids trop important. L'ordre sur les crochets de Lie est le même.

```
weightedBasis(llx,n) ==
   m:=min(n,#llx)
   l:List List MG:=[[] for i in 1..n]
   for i in 1..m repeat l.i:=sort(hall,[u::MG for u in llx.i])
   for i in 2..n repeat
     for j in 1..(i-1) repeat
      k:=(i-j)::NNI
      for u in l.j repeat
       l.i:=union(l.i,[u*v for v in l.k | mkGenerator?(u,v)])
   l
```

— `boundedWeightedBasis(llx,n)` et `boundedBasis(llx,n)` calculent des bases de l'algèbre de Lie libre, pondérée ou pas, dont tous les éléments ont une signature (multi-degré commutatif) bornée. Les implantations sont les mêmes que précédemment. On a ajouté un test.

```
boundedWeightedBasis(llx,n) ==
   m:=min(n,#llx)
   l:List List MG:=[[] for i in 1..n]
   for i in 1..m repeat l.i:=sort(hall,[u::MG for u in llx.i])
   for i in 2..n repeat
     for j in 1..(i-1) repeat
      k:=(i-j)::NNI
      for u in l.j repeat
       l.i:=union(l.i,[u*v for v in l.k |
               mkGenerator?(u,v) and signatureOrder(u*v,a)])])
   l

boundedBasis(lx,n) ==
  l:List List MG:=[[] for i in 1..n]
  l.1 := sort(hall,[u::MG for u in lx])
  for i in 2..n repeat
    for j in 1..(i quo 2) repeat
      k:=(i-j)::NNI
      for u in l.j repeat
        l.i:=union(l.i,[u*v for v in l.k |
               mkGenerator?(u,v) and signatureOrder(u*v,a)])])
```

— `mkGenerator?` teste si le produit de deux éléments est un élément de la base.

```
mkGenerator?(a,b) ==
    retractIfCan b case SE => hall(a,b)
    hall(a,b) and ^hall(a,left b))
```

24.4. Algèbre de Lie libre avec la base de Lyndon

Le principe est rigoureusement le même. Les fonctions `a*b` et `mult` sont, cette fois, définie par

```
a*b ==
  a=b => 0
  lexico(b,a) => -mult(b,a)
  mult(a,b)

mult(a,b) ==
  length(a)=1 or ^lexico(right a,b) => monomial(1$R,a*b)
  aa:=left a
  x:=mult(right a,b)
  +/ [u*mult(aa,v) for u in listOfCoefficient x
                   for v in listOfMonomials x]
     + mult(aa,b)*monomial(1$R,right a)
```

Les opérations permettant de calculer les bases sont implantées comme suit.

```
weightedBasis(llx,n) ==
   m:=min(n,#llx)
   l:List List MG:=[[] for i in 1..n]
   for i in 1..m repeat l.i:=sort(lexico,[u::MG for u in llx.i])
   for i in 2..n repeat
     for j in 1..(i-1) repeat
```

```
          k:=(i-j)::NNI
          for u in l.j repeat
           l.i:=union(l.i,[u*v for v in l.k | mkGenerator?(u,v)])
       l

    basis(lx,n) ==
      l:List List MG:=[[] for i in 1..n]
      l.1 := sort(lexico,[u::MG for u in lx])
      for i in 2..n repeat
        for j in 1..(i-1) repeat
          k:=(i-j)::NNI
          for u in l.j repeat
            l.i:=union(l.i,[u*v for v in l.k | mkGenerator?(u,v)])
      l

    mkGenerator?(a,b) ==
        retractIfCan a case SE => lexico(a,b)
        lexico(a,b) and ^lexico(right a,b)
```

25. Séries de Lie

Ici, plutôt que de créer un domaine de séries de Lie, on a écrit un paquetage qui manipule des listes d'éléments d'une algèbre de Lie libre précédemment définie.

Dans ce paquetage, on possède les opérations de bases, comme l'addition et la multiplication par un scalaire ; la dérivation et l'intégration se font par rapport à un paramètre fictif. La composition de deux listes est la multiplication, au sens des séries de Lie. On a implanté également les trois transformations et leur inverse, puis, étant donné un système triangulaire, factorisé ou pas, une résolution de celui-ci. Enfin étant donné la forme développée d'une transformation canonique, composée de plusieurs transformations, on peut donner celle-ci sous forme de transformation de Lie, d'exponentielle ou de transformation de Dragt-Finn.

```
 LS(R: COMRING,FLA: FLA(R,SYMBOL))  is a package constructor
 Abbreviation for LieSeries is LS
 This constructor is exposed in this frame.
 Issue )edit ls.spad to see algebra source code for LS

------------------------------- Operations --------------------------------
 derivate : LIST FLA -> LIST FLA        integrate : LIST FLA -> LIST FLA
 mult : (FLA,LIST FLA) -> LIST FLA      mult : (R,LIST FLA) -> LIST FLA
 addi : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 compose : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 exponential : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 exponentialGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL) -> LIST FLA
 exponentialGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL,LIST FLA) -> LIST FLA
 factoredProductGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL) -> LIST FLA
 factoredProductGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL,LIST FLA) -> LIST FLA
 factoredProductTransform : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 inverseFactoredProductGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL) -> LIST FLA
 inverseFactoredProductGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL,LIST FLA) -> LIST FLA
 inverseFactoredProductTransform : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 inverseFactoredProductTransform : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 inverseLieGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL) -> LIST FLA
```

```
 inverseLieGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL,LIST FLA) -> LIST FLA
 inverseLieTransform : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 inverseLieTransform : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 lieGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL) -> LIST FLA
 lieGenerators : (NNI,LIST FLA,MG SYMBOL,LIST FLA) -> LIST FLA
 lieTransform : (LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
 mkLieMon : (SYMBOL,NNI,NNI) -> LIST MG SYMBOL
 mkLiePol : (SYMBOL,NNI,NNI) -> LIST FLA
 mkSymbol : (SYMBOL,NNI,NNI) -> LIST SYMBOL
 triangularFactorSystemSolve : (LIST MG SYMBOL,LIST FLA,LIST FLA,MG SYMBOL) ->\
LIST FLA
 triangularSystemSolve : (LIST MG SYMBOL,LIST FLA,LIST FLA) -> LIST FLA
```

Une série de Lie est supposée de la forme

$$f = \sum_{n \geq 0} t^n f_n$$

où t est un paramètre qui vaut 1. f_n est considéré de poids n. On se donne deux éléments, `f` et `g`, sous la forme `f = (f0,f1,...,fn)` et `g = (g0,g1,...,gm)`.

— `mkSymbol(s,m,n)` crée une liste de symboles (au sens Axiom) $s_m, \cdots, s_n$, où `s` est un symbole.

— `mkLieMon` et `mkLiePol` créent les mêmes éléments que précédemment, mais le résultat est une liste d'éléments du magma ou de l'algèbre de Lie libre.

— `mult` est la multiplication par un scalaire ou par un élément de l'algèbre de Lie libre. `addi` effectue la somme de deux listes terme à terme. Le premier élément de chaque liste est de degré 0.

```
mult(r:R,x:LF) == [r*u for u in x]

mult(x:FLA,y:LF) == [x*u for u in y]

addi(x,y) ==
   n:=min(#x,#y)
   [x.i + y.i for i in 1..n]
```

— `derivate` et `integrate` dérive et intègre des listes par rapport à un paramètre fictif.

```
derivate(x) ==
   #x=0 => []
   concat([i::I * x.((i+1)::NNI) for i in 1..((#x-1)::NNI)],0$FLA)

integrate(x) ==
  #x=0 => []
  concat(0$FLA,[recip(j::I::R)$R pretend R * x.j
                                     for j in 1..((#x-1)::NNI)])
```

— `compose(x,y)` calcule $[x, y]$. La longueur du résultat est la longueur de y.

```
compose(x,y) ==
   #x=0 or #y=0 => []
   n:=#x
   m:=#y
   [+/ [x.((j-i+1)::NNI) * y.i for i in 1..j | j<n+i] for j in 1..m]
```

— `exponential` est l'exponentielle de L_x appliquée à y.

```
exponential(x,y) ==
   #x=0 or #y=0 => []
   lx:=y
   Exp:LF:=y
   for i in 1..(#y-1) repeat
       r:=recip(i::I::R)$R pretend R
       lx:=mult(r,compose(x,lx))
       Exp:=addi(Exp,lx)
   Exp
```

— `inverseLieTransform(w,f)` calcule la transformée de Lie inverse de f par T_w. `w` et `f` sont données sous forme de listes d'éléments de l'algèbre de Lie libre.

```
inverseLieTransform(w,f) ==
   n:=#f
   m:=#w
   Lie:List LF:=concat(f,[[0$FLA for i in 1..n] for j in 1..n])
   m=1 => f
   for i in 1..n repeat
       for j in 1..i repeat
         r:=recip(j::I::R)$R pretend R
         jj:=(j+1)::NNI
         ii:=(i-j+1)::NNI
         Lie.jj.ii := r*(+/[k * w.((k+1)::NNI) * Lie.((jj-k)::NNI).ii
                                             for k in 1..j | k<m])
   [+/ [Lie.j.((i-j+1)::NNI) for j in 1..i] for i in 1..n]
```

— `inverseFactoredProductTransform(g,f)` calcule la transformée inverse de Dragt-Finn

```
inverseFactoredProductTransform(g,f) ==
   n:=#f;m:=#g
   F:=[f.i for i in 1..n]
   w:=[0 for i in 1..m]
   for i in 2..m repeat
       w.i:=g.i
       F:=exponential(w,F)
       w.i:=0
   F
```

— `exponentialGenerators(n,l,h)` calcule, à l'ordre n, le générateur de l'exponentielle $\exp(L_x)$, vérifiant $\exp(L_x)h = (l_0, \ldots, l_n)$. Ici, h est un monôme de Lie et l, une série de Lie tronquée. La technique consiste à calculer formellement $\exp(L_x)h$, et à résoudre formellement un système triangulaire factorisable par h. Dans la deuxième version, on suppose déjà connus, les premiers termes du résultat : `kk1`.

```
exponentialGenerators(n,l,h) ==
  kk:LF:=concat(0,mkLiePol(k::SE,1,n))
  Exp:LF:=[0$FLA for i in 0..n]
  Exp.1:=h::MG::FLA
  lx:LF:=Exp
  r:R:=1$R
```

```
  for i in 1..n repeat
     j:=(i+1)::NNI
     lx:=mult(recip(i::I::R)$R pretend R,compose(kk,lx))
     kk.j:=leftDivide(Exp.j+lx.j-l.j,h).1 + kk.j
     ls:List MG:=mkLieMon(k::SE,i,i)
     lx:=append(first(lx,i),[eval(u,ls,[kk.j]) for u in rest(lx,i)])
     Exp:=append(first(Exp,i),[eval(u,ls,[kk.j]) for u in rest(Exp,i)])
     Exp:=addi(Exp,lx)
  kk

exponentialGenerators(n,l,h,kk1) ==
  n<#kk1 => kk1
  kk:LF:=append(kk1,mkLiePol(k::SE,#kk1,n))
  Exp:LF:=[0$FLA for i in 0..n]
  Exp.1:=h::MG::FLA
  lx:LF:=Exp
  r:R:=1$R
  for i in 1..(#kk1-1)::NNI repeat
     j:=(i+1)::NNI
     lx:=mult(recip(i::I::R)$R pretend R,compose(kk,lx))
     Exp:=addi(Exp,lx)
  for i in (#kk1)..n repeat
     j:=(i+1)::NNI
     lx:=mult(recip(i::I::R)$R pretend R,compose(kk,lx))
     kk.j:=leftDivide(Exp.j+lx.j-l.j,h).1 + kk.j
     ls:List MG:=mkLieMon(k::SE,i,i)
     lx:=append(first(lx,i),[eval(u,ls,[kk.j]) for u in rest(lx,i)])
     Exp:=append(first(Exp,i),[eval(u,ls,[kk.j]) for u in rest(Exp,i)])
     Exp:=addi(Exp,lx)
  kk
```

— `inverseLieGenerators`, `inverseFactoredProductGenerators` font les mêmes calculs que précédemment mais, cette fois, pour la transformation de Lie ou la transformation de Dragt-Finn.

```
inverseLieGenerators(n,l,h) ==
  ww:=[0$FLA for i in 1..n]
  r:R:=1$R
  for i in 1..n repeat
     j:=(i+1)::NNI
     r:=recip(i::I::R)$R pretend R
     ww.i:=leftDivide((+/ [k * r * ww.k * l.((j-k)::NNI)
                              for k in 1..(i-1)::NNI])-l.j,h).1
  concat(0$FLA,ww)

inverseLieGenerators(n,l,h,ww1) ==
  n<#ww1 => ww1
  ww:=append(rest(ww1),[0$FLA for i in #ww1..n])
  r:R:=1$R
  for i in ((#ww1-1)::NNI)..n repeat
     j:=(i+1)::NNI
     r:=recip(i::I::R)$R pretend R
     ww.i:=leftDivide((+/ [k * r * ww.k * l.((j-k)::NNI)
                            for k in 1..(i-1)::NNI])-l.j,h).1
```

```
  concat(0$FLA,ww)

inverseFactoredProductGenerators(n,l,h) ==
   gg:LF:=[0$FLA for i in 0..n]
   g:=0$FLA
   Fac:LF:=[0$FLA for i in 0..n]
   Fac.1:=h::MG::FLA
   for i in 1..n repeat
      j:NNI:=(i+1)::NNI
      g:=leftDivide(Fac.j - l.j,h).1
      gg.j:=g
      Fac:=exponential(concat([0$FLA for k in 1..i],g),Fac)
   gg

inverseFactoredProductGenerators(n,l,h,gg1) ==
  n<#gg1 => gg1
  gg:=append(gg1,[0$FLA for i in (#gg1)..n])
  Fac:LF:=[0$FLA for i in 0..n]
  Fac.1:=h::MG::FLA
  Fac:=inverseFactoredProductTransform(first(gg,#gg1),Fac)
  for i in #gg1..n repeat
     j:NNI:=(i+1)::NNI
     g:=leftDivide(Fac.j - l.j,h).1
     gg.j:=g
     Fac:=exponential(concat([0$FLA for k in 1..i],g),Fac)
  gg
```

— `triangularSystemSolve(l,lf,lg)` résout le système d'équations `lf=lg` par rapport à la liste de monômes `l`. `lf` et `lg` sont des listes d'éléments de l'algèbre de Lie libre. Le système doit être triangulaire, sinon, il y a une erreur d'exécution. La procédure de base est la suivante : pour chaque ligne `lf.i-lg.i`, on localise le monôme ayant pour support `l.i` : a`l.i`, et la solution est `l.i` $= \frac{1}{a_i}$`lf.i-lg.i`$-a$`l.i`. On évalue ensuite les lignes suivantes avec la nouvelles valeur de `l.i`.

```
triangularSystemSolve(l,lf,lg) ==
   n:NNI:=min(#l,min(#lf,#lg))
   lgg:LF:=[lg.i - lf.i for i in 1..n]
   lm:List MG:=listOfMonomials(lgg.1)
   lc:List R:=listOfCoefficient(lgg.1)
   j:NNI:=position((l.1)::MG,lm)::NNI
   lgg.1:=(recip(lc.j)$R pretend R) * (lc.j * ((lm.j)::FLA) - lgg.1)
   for i in 2..n repeat
      k:=(i-1)::NNI
      lgg.i:=eval(lgg.i,first(l,k),first(lgg,k))
      lm:List MG:=listOfMonomials(lgg.i)
      lc:List R:=listOfCoefficient(lgg.i)
      j:NNI:=position((l.i)::MG,lm)::NNI
      lgg.i:=(recip(lc.j)$R pretend R) * (lc.j * ((lm.j)::FLA) - lgg.i)
   lgg
```

— `triangularFactorSystemSolve(l,lf,lg,s)` résout le même système après dérivation intérieure par a. Le procédé est le même que précédemment, mais on aura extrait `s` à chaque étape.

```
triangularFactorSystemSolve(l,lf,lg,s) ==
   n:=min(#l,min(#lf,#lg))
   lgg:LF:=[lg.i - lf.i for i in 1..n]
   lgg.1:=leftDivide(lgg.1,s).1
   lm:List MG:=listOfMonomials(lgg.1)
   lc:List R:=listOfCoefficient(lgg.1)
   j:NNI:=position((l.1)::MG,lm)::NNI
   lgg.1:=(recip(lc.j)$R pretend R) * (lc.j * ((lm.j)::FLA) - lgg.1)
   for i in 2..n repeat
      k:NNI:=(i-1)::NNI
      lgg.i:=leftDivide(eval(lgg.i,first(l,k),first(lgg,k)),s).1
      lm:=listOfMonomials(lgg.i)
      lc:=listOfCoefficient(lgg.i)
      j:=position((l.i)::MG,lm)::NNI
      lgg.i:=(recip(lc.j)$R pretend R)*(lc.j * ((lm.j)::FLA)-lgg.i)
   lgg
```

Remarque. — `s` est supposé inférieur à toutes les lettres de l'alphabet. On doit donc vérifier que tel est le cas. Dans une version à venir, on commencera par s'assurer que `s` est bien la plus petite lettre de l'alphabet.

Des exemples de résultats obtenus seront donnés dans l'appendice.

25.1. Composition de transformations

Montrons ici, comment l'on a écrit, dans un fichier qui est interprété par Axiom, les quelques fonctions permettant de composer des transformations de Lie, dans le but de construire des intégrateurs symplectiques.

On se donne, tout d'abord, l'anneau de base qui est l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On construit l'algèbre de Lie libre, avec la base de Lyndon, et l'on charge le package de séries de Lie correspondant.

```
R:=POLY FRAC INT
L:=LFLA(Symbol,R)
LL:=LieSeries(R,L)
```

On se donne une liste de variables, qui sont en fait des scalaires dans `R`.

```
lc:List R:=[char(i)::ST::SE::R for i in 65..90]
ld:List R:=[char(i)::ST::SE::R for i in 97..122]
le:=reverse ld
```

On implante, ensuite, les fonctions qui vont construire les composées de transformations de Lie. Partant de $S_A(t) = \exp(tL_A)$ et $S_B(t) = \exp(tL_B)$, on construit successivement

$$S^{(n)}(t) = S_A(c_1t)S_B(d_1t)\cdots S_A(c_nt)S_B(d_nt), \tag{25.1}$$

en utilisant $S^{(2p+1)}(t) = S^{(2p)}(t)S_A(c_{p+1}t)$ et $S^{(2p+2)}(t) = S^{(2p+1)}(t)S_B(d_{p+1}t)$. Les transformations $S^{(n)}$ étant considérées comme des transformations de Lie, elles sont représentées par la dérivée de leur série génératrice. $S_A(t)$ est représentée par A et $S_B(t)$ par B. Si $S^{(n)}(t) = T^{-1}_{w^{(n)}(t)}$, on aura les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}w^{(2p+1)} = S_A(c_pt)\frac{\partial}{\partial t}w^{(2p)} + c_{p+1}A, \quad \frac{\partial}{\partial t}w^{(2p+2)} = S_B(d_pt)\frac{\partial}{\partial t}w^{(2p+1)} + d_{p+1}B. \tag{25.2}$$

Les c_i et les d_i sont pris dans `lc` et `ld`.

```
symplectic(n:NNI,r:NNI):List L ==
    l:List L  := concat(lc.1 * (A::L),[0$L for i in 2..r])
    ll:List L := [0$L for i in 1..r]
    n=1 => l
    i:NNI:=2
    while i<(n+1) repeat
        j:= i quo 2 + 1
        if (i rem 2)=0 then ll.1:=ld.((j-1)::NNI) * (B::L)
        else ll.1:=lc.j * (A::L)
        l:=addi(ll,exponential(integrate ll,l))
        i:=i+1
    l
```

On peut faire la même chose en supposant, maintenant, que les produits sont réversibles.

```
symplecticr(n:NNI,r:NNI):List L ==
    i:NNI:=n+1
    j:= i quo 2
    if (i rem 2)=0 then l:List L := concat(ld.j * B::L,[0$L for i in 2..r])
    else l:List L := concat(lc.j * A::L,[0$L for i in 2..r])
    ll:List L := [0$L for i in 1..r]
    n=1 => l
    i:=n
    while i>1 repeat
        j:= i quo 2
        if (i rem 2)=0 then ll.1 := ld.j * (B::L)
        else ll.1 := lc.j * (A::L)
        l:=addi(ll,exponential(integrate ll,l))
        i:=i-1
    i:=3
    while i<n+2 repeat
        j:= i quo 2
        if (i rem 2)=0 then ll.1 := ld.j * (B::L)
        else ll.1 := lc.j * (A::L)
        l:=addi(ll,exponential(integrate ll,l))
        i:=i+1
    l
```

On peut étudier les mêmes produits, mais, cette fois, avec 3 opérateurs S_A, S_B et S_C.

```
symplex3(n:NNI,r:NNI):List L ==
    l:List L := concat(lc.1 * A::L,[0$L for i in 2..r])
    ll:List L := [0$L for i in 1..r]
    n=1 => l
    i:NNI:=2
    while i<(n+1) repeat
      j:=i quo 3 + 1
      if (i rem 3)=2 then ll.1:=ld.j * (B::L)
      else if (i rem 3)=0 then ll.1:=le.((j-1)::NNI) * (C::L)
           else ll.1:=lc.j * (A::L)
      l:=addi(ll,exponential(integrate ll,l))
      i:=i+1
    l

symplex3r(n:NNI,r:NNI):List L ==
    i:=n+2
```

```
j:= i quo 3
if (i rem 3)=0 then l:List L := concat(lc.j * (A::L),[0$L for i in 2..r])
else if (i rem 3)=1 then l:List L:=concat(ld.j * (B::L),[0$L for i in 2..r])
     else l:List L := concat(le.j * (C::L),[0$L for i in 2..r])
ll:List L := [0$L for i in 1..r]
n=1 => l
i:NNI:=n+1
while i>2 repeat
  j:=i quo 3
  if (i rem 3)=0 then ll.1:=lc.j * (A::L)
  else if (i rem 3)=1 then ll.1:=ld.j * (B::L)
       else ll.1:=le.j * (C::L)
  l:=addi(ll,exponential(integrate ll,l))
  i:=i-1
i:=4
while i<n+3 repeat
  j:=i quo 3
  if (i rem 3)=0 then ll.1:=lc.j * (A::L)
  else if (i rem 3)=1 then ll.1:=ld.j * (B::L)
       else ll.1:=le.j * (C::L)
  l:=addi(ll,exponential(integrate ll,l))
  i:=i+1
l
```

Des résultats obtenus, on extrait les coefficients qui seront analysés, par la suite, en utilisant d'autres procédures.

Pour les exemples de calculs, ainsi que des méthodes de calcul d'intégrateurs symplectiques, on pourra se reporter à l'appendice.

26. Calculs de formes normales

Plusieurs domaines et paquetages ont été implantés pour pouvoir calculer des formes normales sur quelques exemples concrets. Malheureusement, la complexité des problèmes intéressants, est telle, que nous avons dû nous restreindre, pour l'instant, à des problèmes élémentaires.

Il semblerait à première vue qu'il soit très difficile, voire irréaliste de construire des paquetages suffisamment généraux pour pouvoir traiter la plupart des cas. On assiste, dans les équipes concernées, aux développements de logiciels très spécialisé sur une classe de problèmes. A mon sens, ces difficultés sont liées au fait que chaque problème admet une représentation particulière, qui ne peut être prise en compte par un logiciel généraliste.

26.1. Manipulations des séries de Poisson

Comme nous l'avons vu, il serait intéressant de pouvoir manipuler des polynômes d'expressions trigonométriques sur un anneau. On a donc créé un certain nombre de domaines de séries de Poisson.

On ne traite que le cas où h_0 a une forme suffisamment simple pour qu'on puisse connaître son flot ; par exemple, si

$$h_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \tag{26.1}$$

les courbes solutions sont, dans le cas des coordonnées classiques,

$$q_i(t) = q_i(0)\ cos\ (\omega_i t) + p_i(0)\ sin\ (\omega_i t) \tag{26.2}$$

$$p_i(t) = p_i(0)\ cos\ (\omega_i t) - q_i(0)\ sin\ (\omega_i t), \tag{26.3}$$

dans le cas des variables angle-action,

$$j_i(t) = j_i(0) \quad , \quad \phi_i = \phi_i(0) + \omega_i t. \tag{26.4}$$

Parallèlement, on a développé deux types de manipulations algébriques, d'un côté, les polynômes en les variables cartésiennes, d'autre part des expressions dans les coordonnées angle-action.

26.1.1. En coordonnées cartésiennes :

On suppose que pour tout n, h_n est un polynôme en $p_i,\ q_i$, à coefficients dans un anneau contenant des expressions trigonométriques de la forme cos $(P\ t)$, sin $(P\ t)$ où P est une fraction rationnelle à plusieurs variables, et fermé pour la dérivation et l'intégration.

Pour manipuler de telles expressions, on a été amené à créer des nouveaux domaines et paquetages (cf. [30]).

- Domaine `MTGD(x,lv1,lv2)`
  Séries de poisson d'une liste de variables $lv1$, du temps x où les pulsations sont des polynômes à plusieurs variables $lv2$, à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Les coefficients sont dans le corps des fractions de ce dernier. Par exemple :

$$u = \frac{\omega}{\Omega^2 - \omega^2}\ \cos\ (\ \Omega t + q_1 - q_2)\ . \tag{26.5}$$

- Package de dérivation et d'intégration, par rapport au temps, pour `MTGD`. Par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{\omega}{\Omega^2 - \omega^2}\ \sin\ (\ \Omega t + q_1 - q_2)\ , \tag{26.6}$$

$$\int_t u = \frac{\omega}{\Omega^3 - \Omega\omega^2}\ \sin\ (\ \Omega t + q_1 - q_2)\ . \tag{26.7}$$

- Package de manipulations dans `DMP(lv,MTGD(t,lv1))`, où lv est la liste des variables de l'espace des phases considéré. (`DMP` est le constructeur de polynômes à plusieurs variables distribuées).

- Domaine : `OTGD(t,lv1)`
  Séries de poisson d'une variable t, où les pulsations appartiennent à l'anneau des polynômes à plusieurs variables $lv1$ sur $\mathbb{Q}$, à coefficients dans le corps de fraction de ce dernier.

- Package de dérivation et d'intégration, par rapport au temps, pour `OTGD(t,lv1)`

- Package de manipulations dans `DMP(lv,OTGD(t,lv1))`, où lv est la liste des variables de l'espace des phases.

En utilisant ces différents paquetages, on peut appliquer notre version de l'algorithme de Deprit. En entrée, nous avons h comme liste de polynômes à $2n$ variables p_i, q_i, à coefficients dans l'anneau des séries de Poisson.

26.1.2. Coordonnées angle-action

Cette deuxième façon d'aborder la résolution est, en fait, plus adaptée au cadre dans lequel nous nous sommes placés. On fait les mêmes hypothèses que précédemment. On a été amené à travailler dans un domaine de Scratchpad qui contient des racines carrées et on utilise `RadicalExtension` qui n'est autre que l'extension par radicaux d'un corps donné.

- Domaine `RTGD(x,lv1)`
  Séries de poisson d'une liste de variables $lv1$, du temps x, où les pulsations sont des fractions rationnelles à plusieurs variables (non pré-définies) à coefficients dans $\mathbb{Q}$, les coefficients sont dans l'extension par les radicaux des fractions rationnelles sur $\mathbb{Q}$. Par exemple,

$$u = \sqrt{\tfrac{2j}{\omega}}\ \cos\ (\ \Omega t + \phi_1 - \phi_2)\ . \tag{26.8}$$

- Package de dérivation et d'intégration, par rapport au temps, dans le cas de `RTGD`. Par exemple,

$$\frac{\partial u}{\partial \phi_1} = -\sqrt{\tfrac{2j}{\omega}}\ \sin\ (\ \Omega t + \phi_1 - \phi_2)\ , \tag{26.9}$$

$$\int_j u = -\frac{2j}{3}\sqrt{\tfrac{2j}{\omega}}\ \sin\ (\ \Omega t + \phi_1 - \phi_2)\ . \tag{26.10}$$

- Il a été créé pour chacun de ces domaines, deux paquetages contenant les fonctions nécessaires aux algorithmes des méthodes de Dragt-Finn et de Deprit.

Par exemple, voici une présentation de `RTGD` :

```
RTGD(x: E,lvp: L E,lvq: L E)  is a domain constructor
Abbreviation for RadicalTimeTrigoDomain is RTGD
This constructor is currently exposed.
Issue )edit RATRIGD2 SPAD A1 to see algebra source code for RTGD

--------------------------- Operations ---------------------------------

?+? : ($,$) -> $                      ?*? : (RF RN,$) -> $
?*? : (RN,$) -> $                     ?*? :(RE RF RN,$) -> $
?*? : ($,$) -> $                      ?*? : ($,$) -> $
?*? : (I,$) -> $                      ?**? : ($,NNI) -> $
?-? : ($,$) -> $                      -? : $ -> $
?=? : ($,$) -> B                      cderiv : ($,SE) -> $
-- characteristic : () -> NNI         coerce : RE RF RN -> $
coerce : $ -> $                       coerce : I -> $
coerce : $ -> E                       -- coerce : E -> Union($,"failed")
const : $ -> $                        cos : (P RN,DP(# lvq,I)) -> $
deriv : $ -> $                        integ : $ -> $
p : PI -> SE                          pderiv : ($,OV lvq) -> $
pinteg : ($,OV lvq) -> $              poisson : ($,$) -> $
q : PI -> OV lvq                      recip : $ -> Union($,"failed")
retract : $ -> RE RF RN               retractable? : $ -> B
```

```
sin : (P RN,DP(# lvq,I)) -> $         1 : () -> $
0 : () -> $
new : Record(c: RE RF RN,s: RE RF RN,int1: P RN,int2: DP(# lvq,I)) -> $
retractIfCan : $ -> Union(RE RF RN,"failed")
```

Ici, `RN` représente les rationnels, `RF` les fractions rationnelles, `RE` RadicalExtension etc.

26.2. Polynômes

Lorsque les systèmes à étudier sont indépendants du temps, on pourra faire des manipulations sur les polynômes. On prend, comme représentation, les polynômes à plusieurs variables distribuées. Pour résoudre l'équation de perturbation, on calcule, d'une part la matrice L_{h_0}, par récurrence à partir de le Hessienne de h_0, d'autre part, on transforme les polynômes en vecteur, et on utilise les paquetages éxistant déjà sous Scratchpad II pour inverser le système linéaire. Les Hamiltoniens ainsi que les fonctions génératrices sont données sous formes de listes où le i ième terme est le terme d'ordre $i+2$.

Conclusion et perspectives

Le point de départ de cette étude est la comparaison de deux méthodes de perturbations couramment utilisées en mécanique.

Le premier résultat, qui n'est pas une nouveauté en soi, est que les deux méthodes sont équivalentes, dans la mesure où elles produisent les mêmes formes normales et les mêmes intégrales premières formelles. Ce résultat est plutôt dû à l'unicité de la forme normale de Birkhoff dans le cas non-résonnant. Néanmoins, on a pu constater que la représentation d'une transformation canonique formelle a une influence certaine sur la complexité des calculs nécessaires.

L'utilisation de la transformation de Dragt-Finn (produit croissant d'exponentielles) se justifie pour le calcul de formes normales, puisque le nombre d'évaluations nécessaires y est moindre. L'utilisation de l'exponentielle montre ses avantages dans la recherche d'intégrateurs symplectiques réversibles alors que la transformation de Lie est bien commode pour composer des transformations canoniques. De plus, cette dernière est la représentation classique de l'application d'un flot non-autonome.

Les estimations asymptotiques obtenues avec la transformation de Deprit, sont meilleures que celles obtenues par moi-même avec la transformation de Dragt-Finn. Sans doute, des résultats plus fins sont ils possibles en utilisant des résultats combinatoires sur les partitions. Ce phénomène n'a cependant pas encore d'incidence sur les estimations de stabilité qu'on peut en déduire comme le montrent les résultats obtenus par Giorgilli & Celleti [8].

De ces résultats, on peut déduire qu'il est nécessaire de calculer effectivement des formes normales et des intégrales premières formelles, pour obtenir des résultats plus fins, même si les ordres retenus pour le calcul de celles-ci sont souvent très petits. Ils sont très petits, certainement parce que la complexité des calculs, ou la taille des données sont trop importants. Une des façons d'y remédier serait de garder le moins de paramètres possible et de travailler de façon numérique. Une des voies à suivre serait certainement l'étude de l'importance relative des différents paramètres.

L'utilisation de la base de Lyndon a permis de calculer les relations entre les générateurs des différentes transformations canoniques, proches de l'identité, ce que ne permettait pas la base de Hall. On retrouve, d'ailleurs, une méthode de calcul de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Le fait de pouvoir calculer ces identités, tout en restant dans l'algèbre de Lie libre, n'ajoute à mon sens, aucune complexité supplémentaire. Les dimensions des modules considérés sont les mêmes que lors de l'utilisation de la bijection entre les mots de Lyndon et la base de Lyndon. Il n'est pas nécessaire de connaître le parenthésage de chaque élément de la base de Lyndon.

La représentation des éléments du magma par des listes, a apporté un gain de temps appréciable. Dans cette représentation, il semble que la décomposition sur la base de

Lyndon soit plus rapide que sur la base de Hall.

Enfin, la recherche des intégrateurs symplectiques dont le formalisme n'est pas sans rappeler le problème du motion-planning ([45]) se heurte, lorsque les ordres sont élevés, à la recherche de points réels dans une variété. Pour les ordres inférieurs à 6, on a donné une liste exhaustive des intégrateurs symplectiques (excepté pour l'ordre 5 ou un doute subsiste). Sans doute, une étude approfondie de la géométrie des solutions permettrait-elle de donner des solutions algébriques à des ordres plus élevés.

Bibliographie

[1] G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics, Number Theory, vol 2, Addison-Wesley, 1976.

[2] V.I. Arnold, *Dynamical Systems IV*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol 4, Springer Verlag, 1978.

[3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods for Classical Mechanics*, Graduate texts in Mathematics, vol 60, Springer Verlag, 1978.

[4] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, *A Proof of Nekhoroshev's Theorem for the Stability Times in Nearly Integrable Hamiltonian Systems*, Celestial Mechanics **37** (1985), 1–25.

[5] M. Berz, E. Forest, *Canonical Integration and Analysis of Periodic Maps using Non-standard Analysis and Lie Methods*, in *Lie Methods in Optics II*, Springer Verlag **352** (1988).

[6] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Eléments de Mathématiques, Hermann, Paris, 1972.

[7] J.R. Cary, *Lie Transform Perturbation Theory for Hamiltonian Systems*, in *Physics Reports*, North-Holland Publishing Compagny **79-2** (1981), 129–159.

[8] A. Celletti, A. Giorgilli, *On the Stability of the Lagrangian Points in the Spatial Restricted Problem of Three Bodies*, CARR Reports in Mathematical Physics **19/90** (1990).

[9] P.J. Channel, J.C. Scovel, *Symplectic Integration of Hamiltonien Systems*, Nonlinearity **3** (1990), 231–259.

[10] P.J. Channel, J.C. Scovel, *Integrators for Lie-Poisson Dynamical Systems*, Physica D **50** (1991), 80–88.

[11] A. Deprit, *Canonical Transformations Depending on a Small Parameter*, Celestial Mechanics **1** (1969), 12–30.

[12] J. Diamond, A.J. Dragt, F. Neri, J. van Zeijts, *Analytic Third-order Transfer Map for Combined-Function Quadrupole*, preprint (1990).

[13] A.J. Dragt, *Numerical Third-order Transfer Map for Solenoid*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research **A298** (1990), 441–459.

[14] J. Dragt, J. M. Finn, *Lie Series and Invariant Functions for Analytic Symplectic Maps*, Journal of Mathematical Physic **17** (1976), 2215–2227.

[15] J. Dragt, J. M. Finn, *Normal form for Mirror Machin Hamiltonians*, Journal of Mathematical Physic **20 n°12** (1979).

[16] A.J. Dragt, L.M. Healy, *Concatenation of Lie Algebraic Maps*, in *Lie Methods in Optics II*, Springer Verlag **352** (1988).

[17] F. Fassò, *On a Relation among Lie Series*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **46** (1989), 113–118.

[18] F. Fassò, G. Benettin, *Composition of Lie transforms with rigourous estimates and applications to Hamiltonian perturbation theory*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **40** (May 1989).

[19] J.M. Finn, *Lie Series : a Perspective, Local and Global Methods of nonlinear Dynamics*, Lecture Notes in Physics **252** (1984), 63–86.

[20] E. Forest, D. Ruth, *Fourth-Orther Symplectic Integration*, Physica D **43** (1990), 105–117.

[21] E. Fried, G. Ezra, *PERTURB : A Special-Purpose Algebraic Manipulation Program for Classical Perturbation Theory*, Journal of Computational Chemistery (1987), 397–411.

[22] A. Giorgilli, *Rigourous Results on the Power Expansions for the Integrals of a Hamiltonian System near a Elliptic Equilibrium Point*, Annales de l'Institut Henri Poincaré **48** (1988), 423–439.

[23] A. Giorgilli, L. Galgani, *Formal Integrals for an Autonomous Hamiltonian System near an equilibrium point*, Celestial Mechanics **17 94** (1977), 267–280.

[24] A. Giorgilli, L. Galgani, *Rigourous Estimates for the Series Expansions of Hamiltonian Perturbation Theory*, Celestial Mechanics **37** (1985), 95–112.

[25] Giorgilli, Delshams, Fontich, Galgani, Simò, *Effective Stability for a Hamiltonian System near an Elliptic Equilibrium, with an Application to the restricted Three Body Problem*, Journal of Diff. Equations (1988).

[26] W. Gröbner, *Die Lie-Reihen und Ihre Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967.

[27] Goutelas 89, *Les Méthodes Modernes de la Mécanique Céleste*, Editions Frontières, D. Benest, C. Froeschle eds, 1989.

[28] R. Grossman, *Using Trees To compute Approximate Solutions to Ordinary Differentials Equations Exactly*, Differential Equations and Computer Algebra (1991), 29–60.

[29] J. Henrard, *The Algorithm of the Inverse for Lie transform*, Recent Advances in Dynamical Astronomy, D. Reidel Publishing Compagny (1973), 250–259.

[30] R.D. Jenks, R.S. Sutor, *Axiom, the Scientific Computation System*, Springer Verlag, NaG, 1992.

[31] A.A. Kamel, *Perturbation methods in the theory of nonlinear oscillations*, Celestial Mechanics **3** (1970), 90–106.

[32] P.-V. Koseleff, *Quelques Bases et Formules dans les Algèbres de Lie libres*, Etude F.136, I.B.M. France, Paris (1988).

[33] P.-V. Koseleff, *Contributions aux méthodes de Lie pour la résolution de systèmes hamiltoniens*, Etude F.144, I.B.M. France, Paris (1989).

[34] P.-V. Koseleff, *Jeux de Mots dans les Algèbres de Lie libres : Quelques Bases et Formules*, Theoretical Computing Science (1991).

[35] P.-V. Koseleff, *Relations among Formal Lie Series and Construction of Symplectic Integrators*, AAECC'10 proceedings, in print (1993).

[36] P.-V. Koseleff, *Comparison between Deprit and Dragt-Finn perturbation methods*, Celestial Mechanics, in print (1993).

[37] J. Laskar, *Analytical Framework in Poincaré Variables for the Motion of the Solar System*, Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems (1991).

[38] M.A. Lichtenberg, A.J. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Applied Mathematical Sciences 92, Springer Verlag, 1988.

[39] P. Lochak, C. Meunier, *Multiphase Averaging for Classical Systems*, Applied Mathematical Sciences 78, Springer Verlag, New-York, 1988.

[40] G. Mélançon, *Combinatorics of Hall trees and Hall Words*, Journal of Combinatorial Theory **A 59** (1992), 285–308.

[41] K. R. Meyer, G. R. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Applied Mathematical Sciences 92, Springer Verlag New-York, 1992.

[42] J. Michel, *Bases des Algèbres de Lie et Série de Hausdorff*, Séminaire Dubreil, Paris **27, 6** (1974).

[43] J. Michel, *Bases des Algèbres de Lie libres, Étude des coefficients de la Formule de Campbell-Hausdorff*, Thèse de troisième cycle, Orsay, 1974.

[44] D. Perrin, *Factorisation of free monoids*, in *Lothaire M., Combinatorics On Words, Chapitre 5*, Addison-Wesley (1983).

[45] M. Petitot, *Algèbre Non-commutative en Scratchpad : Application au Problème de la Réalisation Minimale Analytique*, Thèse de Doctorat, Université de Lille I, 1991.

[46] D. Pinchon, *Langages de Calcul Formel*, Encyclopédie des Techniques de l'ingénieur (1991).

[47] G. Pòlya, G. Szegö, *Problems ans Theorems in Analysis I*, Springer Study Edition, Springer Verlag, 1972.

[48] Qin Meng-Zhao, Zhu Wen-Jie, *Construction of Higher Order Symplectic Schemes by Composition*, Computing **47** (1992), 309–321.

[49] A.A. Sagle, R.E Walde, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Pure and Applied Mathematics 51, Academic Press, 1973.

[50] J.-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Lecture Notes in Mathematics, 1500, Springer Verlag, 1991.

[51] C.L. Siegel, J.K. Moser, *Lectures on celestial Mechanics*, Die Grundlehren der matematischen Wissenschaften, band 187, Springer Verlag, 1971.

[52] C. Simò, *Estabilitat de Sistemes Hamiltonians*, Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona **48** (1989), 303–348.

[53] S. Steinberg, *Lie Series, Lie Transformations, and their Applications*, in *Lie Methods in Optics*, Lecture Notes in Physics **250** (1985).

[54] M. Suzuki, *Fractal Decomposition of Exponential Operators with Applications to Many-Body Theories and Monte Carlo Simulations*, Physic Letters A **146** (1990), 319–323.

[55] G. Viennot, *Une Théorie Algébrique des Bases et Familles Basiques des Algèbres de Lie*, Séminaire Dubreuil **27, 5** (1974).

[56] G. Viennot, *Quelques Bases et Familles Basiques des Algèbres de Lie Libres Commodes pour les Calculs sur Ordinateurs*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 49-50 (1975), 201–209.

[57] G. Viennot, *Algèbres de Lie libres et Monoïdes Libres*, Lecture Notes in Mathematics, vol 691, Springer Verlag, 1978.

[58] L. Wauthier, *Utilisation du Calcul Formel en Théorie Analytique du Mouvement des Satellites Artificiels*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1991.

[59] J. Wisdom, M. Holman, *Symplectic Maps for the N-Body Problem*, The Astronomic Journal **102(4)** (1991), 1528–1538.

[60] H. Yoshida, *Conserved Quantities of Symplectic Integrators for Hamiltonian Systems*, Physica D (1990).

[61] H. Yoshida, *Construction Of Higher Order Symplectic Integrators*, Physics Letters A **150,** (1990), 262–268.

Appendice

Dans cet appendice, sont proposés des exemples de calculs de forme normale, obtenues en utilisant la méthode de Dragt-Finn. Sont également présentés, des exemples de sessions en Axiom, permettant de manipuler des polynômes de Lie. On montrera comment on obtient des intégrateurs symplectiques, en utilisant Axiom, pour le calcul des équations à résoudre, puis Macaulay et Axiom, pour le calcul des solutions ou de la dimension et du degré de la variété des solutions.

A. Calculs de forme normale

Les exemples de calcul de forme normale présentés ici, sont des cas relativement simples. Ces résultats ont été obtenus en utilisant Scratchpad II. Avec à plusieurs degrés de liberté, on se heurte très souvent, à des données trop importantes pour pouvoir être convenablement traitées. Il semble, qu'il soit nécessaire d'adapter à chaque type de Hamiltonien à traiter, un programme spécifique.

A.1. Exemples à un degré de liberté

A.1.1. Oscillateur perturbé

Considérons le Hamiltonien $h = \frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right) + \frac{1}{3}q^3$. En appliquant la méthode de Dragt-Finn, on trouve un Hamiltonien normalisé à l'ordre 20 :

$$\begin{aligned}K = {} & \tfrac{1}{2}\left(p^2+q^2\right) - \tfrac{5}{48}\left(p^2+q^2\right)^2 - \tfrac{235}{3456}\left(p^2+q^2\right)^3 - \tfrac{38585}{497664}\left(p^2+q^2\right)^4 - \tfrac{2663129}{23887872}\left(p^2+q^2\right)^5 \\ & - \tfrac{156934505}{859963392}\left(p^2+q^2\right)^6 - \tfrac{13400341405}{41278242816}\left(p^2+q^2\right)^7 - \tfrac{7275692993855}{11888133931008}\left(p^2+q^2\right)^8 \\ & - \tfrac{12369775168615645}{10271347716390912}\left(p^2+q^2\right)^9 - \tfrac{27168477250164385 85}{1109305553370218496}\left(p^2+q^2\right)^{10} \;.\end{aligned}$$

Temps c.p.u : 3 minutes. (IBM4381)

A.1.2. Pendule

Ancien Hamiltonien (à l'ordre 30) :

$$\begin{aligned}h = {} & \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}q^2 - \tfrac{1}{24}q^4 + \tfrac{1}{720}q^6 + -\tfrac{1}{40320}q^8 + \tfrac{1}{3628800}q^{10} - \tfrac{1}{479001600}q^{12} + \tfrac{1}{87178291200}q^{14} \\ & - \tfrac{1}{20922789888000}q^{16} + \tfrac{1}{6402373705728000}q^{18} - \tfrac{1}{2432902008176640000}q^{20} \\ & + \tfrac{1}{1124000727777607680000}q^{22} - \tfrac{1}{620448401733239439360000}q^{24} + \tfrac{1}{403291461126605635584000000}q^{26} \\ & - \tfrac{1}{304888344611713860501504000000}q^{28} + \tfrac{1}{265252859812191058636308480000000}q^{30}.\end{aligned}$$

Nouveau Hamiltonien (à l'ordre 30) :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(q^2+p^2\right)-\tfrac{1}{64}\left(q^2+p^2\right)^2-\tfrac{1}{2048}\left(q^2+p^2\right)^3-\tfrac{5}{131072}\left(q^2+p^2\right)^4-\tfrac{33}{8388608}\left(q^2+p^2\right)^5\\
&\quad-\tfrac{63}{134217728}\left(q^2+p^2\right)^6-\tfrac{527}{8589934592}\left(q^2+p^2\right)^7-\tfrac{9387}{1099511627776}\left(q^2+p^2\right)^8\\
&\quad-\tfrac{175045}{140737488355328}\left(q^2+p^2\right)^9-\tfrac{422565}{2251799813685248}\left(q^2+p^2\right)^{10}\\
&\quad-\tfrac{4194753}{144115188075855872}\left(q^2+p^2\right)^{11}-\tfrac{1330745}{288230376151711744}\left(q^2+p^2\right)^{12}\\
&\quad-\tfrac{4403374207}{590295810358705651712}\left(q^2+p^2\right)^{13}-\tfrac{578183175}{4722366482869645213696}\left(q^2+p^2\right)^{14}\\
&\quad-\tfrac{12308013927}{604462909807314587353088}\left(q^2+p^2\right)^{15}.
\end{aligned}$$

Fonction génératrice (à l'ordre 9) :

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{64}qp^3-\tfrac{5}{192}q^3p-\tfrac{1}{1024}qp^5-\tfrac{1}{384}q^3p^3-\tfrac{17}{15360}q^5p-\tfrac{11}{131072}qp^7-\tfrac{121}{393216}q^3p^5-\tfrac{1513}{5898240}q^5p^3\\
&\quad-\tfrac{2657}{24772608}q^7p\,.
\end{aligned}$$

Anciennes variables par rapport aux nouvelles variables (à l'ordre 9) :

$$\begin{aligned}
Q=\;&q-\tfrac{3}{64}qp^2-\tfrac{5}{192}q^3-\tfrac{37}{8192}qp^4-\tfrac{37}{4096}q^3p^2-\tfrac{11}{122880}q^5-\tfrac{39}{524288}qp^6-\tfrac{731}{1572864}q^3p^4\\
&-\tfrac{727}{1572864}q^5p^2+\tfrac{1415}{14155776}q^7+\tfrac{83}{134217728}qp^8-\tfrac{463}{100663296}q^3p^6-\tfrac{1687}{67108864}q^5p^4\\
&-\tfrac{51281}{1509949440}q^7p^2-\tfrac{438161}{54358179840}q^9\,.
\end{aligned}$$

Ces formules ont été calculées à l'ordre 30 en 2 minutes en utilisant Scratchpad sur IBM4381.

A.1.3. Oscillateur harmonique perturbé

Ancien Hamiltonien :

$$h=\tfrac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)+a_2q^4+a_3q^6+a_4q^8+a_5q^{10}+a_6q^{12}+a_7q^{14}+a_8q^{16}+a_9q^{18}+a_{10}q^{20}.$$

Nouveau Hamiltonien (à l'ordre 20) :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\\
&+\tfrac{1}{2}(3a_2)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^2\\
&+\tfrac{1}{16}(-17a_2^2+10a_3)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^3\\
&+\tfrac{1}{8}(375a_2^3+330a_2a_3+70a_4)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^4\\
&+\tfrac{1}{8}(-10689a_2^4+12516a_2^2a_3-1572a_3^2+3024a_2a_4+504a_5)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^5\\
&+\tfrac{1}{8}(87549a_2^5+127932a_2^3a_3+33684a_2a_3^2+32368a_2^2+7112a_3a_4+6720a_2a_5+924a_6)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^6\\
&+\tfrac{1}{256}(-3132399a_2^6+5485374a_2^4a_3+2218788a_2^2a_3^2+117960a_3^3+1420296a_2^3+679824a_2a_3a_4+31880a_4^2+320760a_2^2\\
&\qquad+62640a_3a_5+58608a_2a_6+6864a_7)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^7\\
&+\tfrac{1}{2048}(238225977a_2^7+486162630a_2^5a_3+265977900a_2^3a_3^2+33288840a_2a_3^3+127609830a_2^4+95859000a_2^2a_3\\
&\qquad+7006680a_3^2a_4+6728760a_2a_4^2+30119400a_2^3+13215600a_2a_3+1115280a_2a_5+6173640a_2^2+1085040a_3a_6
\end{aligned}$$

$$+1009008a_2a_7+102960a_8)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^8$$

$$+\tfrac{1}{16384}(-18945961925a_2^8+44145981880a_2^6a_3+30477140760a_2^4a_3^2+6275802720a_2^2a_3^3+183218640a_3^4+11691155520a_2^5$$
$$+12040842880a_2^3a_3+2109803520a_2a_3^2a_4+1012431200a_2^2+136607680a_3a_4^2+2834774800a_2^4+1987740480a_2^2a_3$$
$$+134122560a_3^2+257579520a_2a_4a_5+9700160a_5^2+618280960a_2^3+250440960a_2a_3+19212160a_4a_6+116276160a_2^2$$
$$+18578560a_3a_7+17205760a_2a_8+1555840a_9)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^9$$

$$+\tfrac{1}{16384}(2956096a_{10}+194904116847a_2^9+510499888800a_2^7a_3+425756036376a_2^5a_3^2+124085886144a_2^3a_3^3$$
$$+9047682864a_2a_3^4+136034613880a_2^6+178463437680a_2^4a_3+52065396768a_2^2a_3^2+1900075584a_3^3a_4$$
$$+16647437136a_2^3+5469343968a_2a_3a_4^2+109591328a_4^3+33584619552a_2^5+32674055040a_2^3a_3+5368091520a_2a_3^2$$
$$+5151717120a_2^2+645507456a_3a_4a_5+304231488a_2a_5^2+7614132504a_2^4+5006220384a_2^2a_3+313702752a_3^2$$
$$+602431104a_2a_4+41587392a_5a_6+1547562016a_2^3+582149568a_2a_3+40936896a_4a_7+269178624a_2^2$$
$$+39426816a_3a_8+36406656a_2a_9)\left(\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\right)^{10}$$

A.1.4. Oscillateur harmonique perturbé

Hamiltonien :

$$h=\tfrac{\omega}{2}\left(p^2+q^2\right)+a_2q^4+a_3q^6+a_4q^8+a_5q^{10}.$$

Nouveau Hamiltonien :

$$K=\tfrac{\omega}{2}\left(p^2+q^2\right)+\tfrac{3a_2}{8}\left(p^2+q^2\right)^2+\tfrac{1}{32}(-17a_2^2+10a_3\omega)\omega\left(p^2+q^2\right)^3+\tfrac{1}{256}(375a_2^3-330a_2a_3\omega$$
$$+70a_4\omega^2)\omega^2\left(p^2+q^2\right)^4+\tfrac{1}{2048}(-10689a_2^4+12516a_2^2a_3\omega-1572a_3^2-3024a_2a_4\omega^2$$
$$+504a_5\omega^3)\omega^3\left(p^2+q^2\right)^4$$

Ce Hamiltonien intervient souvent, par exemple, lorsqu'on étudie un système à plusieurs degrés de libertés, que l'on réduit par rapport à l'un des degrés de liberté.

A.2. Exemples à deux degrés de liberté

A.2.1. Particule dans un champ magnétique

On utilise le modèle donné dans [15] du Hamiltonien d'une particule soumise à un champ magnétique. On a comme Hamiltonien

$$h=\tfrac{1}{2}\left(p_2^2+q_2^2\right)+\tfrac{1}{2}p_1^2+\tfrac{1}{2}q_1^2q_2^2+q_1^4q_2^2\ .$$

En appliquant la méthode de l'opérateur adjoint, on trouve

$$h=\tfrac{1}{2}\left(p_2^2+q_2^2\right)+\tfrac{1}{2}p_1^2+\tfrac{1}{2}q_1^2\left(\tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)\right)\right)+\tfrac{7}{8}q_1^4\left(\tfrac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)\right)\ .$$

En posant $\Omega^2=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)\right)^2+\left(\frac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)\right)$ et $e_2=\frac{1}{2}(p_2^2+q_2^2)$, et en effectuant le changement de variables

$$P_1=\sqrt{\Omega p_1}\quad\text{et}\quad Q_1=\frac{q_1}{\sqrt{\Omega}},\tag{A.1}$$

on se ramène à un Hamiltonien à un degré de liberté

$$H=e_2+\tfrac{\Omega}{2}(P_1^2+Q_1^2)+\tfrac{7e_2}{\Omega^2}Q_1^4\ .\tag{A.2}$$

Celui-ci est de la forme précédente. Il se normalise en

$$K = e_2 + \frac{\Omega}{2}(P_1^2 + Q_1^2) + \frac{3}{8}\left(\frac{7e_2}{\Omega^2}\right)(P_1^2 + Q_1^2)^2 \ , \tag{A.3}$$

$$K = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\Omega}{2}(P_1^2 + Q_1^2) + \frac{21}{8}\left(\frac{(P_1^2+Q_1^2)^2}{1+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2)\right)}\right) \tag{A.4}$$

On a donc trouvé, à l'ordre 4, 2 intégrales premières en involution :

$$P_1^2 + Q_1^2 \quad \text{et} \quad p_2^2 + q_2^2 \ . \tag{A.5}$$

La première normalisation a été faite en 90 secondes. La deuxième n'est qu'une suite d'évaluations et de réécritures des expressions.

A.3. Exemples dépendant du temps

Considérons le Hamiltonien suivant :

$$h = \frac{1}{2}\left(p^2 + a\omega^2\left(1 + \sin(\Omega t)\right)q^2\right) \ . \tag{A.6}$$

On utilise les coordonnées angle-action, si bien que

$$h = \omega j + 2aj\omega \sin(\Omega t)\sin(\phi)\cos(\phi) \ . \tag{A.7}$$

On trouve, par la méthode de Deprit,

$$K = j\omega - j\frac{1}{4}\frac{a^2\omega^3}{(\Omega-2\omega)(\Omega+2\omega)} + j\frac{a^4\omega^5}{64} + j\frac{2\Omega^4-35\omega^2\Omega^2+120\omega^4}{(\Omega-2\omega)^3(\Omega+2\omega)^3(\Omega-\omega)(\Omega+\omega)} + \cdots \tag{A.8}$$

On peut, aussi, considérer le Hamiltonien
$h = \frac{1}{2}p^2 + a\omega^2\left(1 + \sin(\Omega t)\right)\left(1 - \cos(q)\right)$.

Dans ce cas, on trouve

$$K = \omega j - \frac{1}{4}\frac{a^2 j\omega^3}{(\Omega-2\omega)(\Omega+2\omega)} + \frac{1}{8}\frac{a^2 j^2\omega^2}{(\Omega-2\omega)(\Omega+2\omega)} + \frac{a^2 j\omega}{576(\Omega-2\omega)^3(\Omega+2\omega)^3(\Omega-\omega)(\Omega+\omega)(\Omega+4\omega)(\Omega-4\omega)}(
-3712j^2\omega^8-8640a^2\omega^{10}+(5824j^2\omega^6+5580a^2\omega^8)\Omega^2-(2472j^2\omega^4+603a^2\omega^6)\Omega^4+(376j^2\omega^2+18a^2\omega^4)\Omega^6
-16j^2\Omega^8)$$

Ce modèle correspond à une balançoire sur laquelle est posé un enfant. La balançoire avec l'enfant a une pulsation propre ω, et l'enfant bat les jambes avec une pulsation Ω. Il est bien connu que le système entre en résonance, lorsque $\Omega = \pm 2\omega$, mais aussi, dans une moindre mesure, lorsque $\Omega = \pm\omega$ ou $\Omega = \pm 4\omega$.

B. Exemples de sessions

B.1. Décomposition de polynômes de Lie

Voici un petit exemple de session, qui permet de décomposer sur la base de Hall, ou la base de Lyndon, un élément du magma. Pour vérifier les calculs, on a la possibilité de passer d'une base à l'autre, en passant par le magma.

On commence par charger les différents modules.

```
)lo FLA FLA- MG LFLA HFLA LS )cond
   loading /cmat/formel/koseleff/Spad/spad7/FLA.NRLIB for category
   FreeLieAlgebra
   loading /cmat/formel/koseleff/Spad/spad7/FLA-.NRLIB for domain
   FreeLieAlgebra&
   loading /cmat/formel/koseleff/Spad/spad7/MG.NRLIB for domain Magma
   loading /cmat/formel/koseleff/Spad/spad7/LFLA.NRLIB for domain
   LyndonFreeLieAlgebra
   loading /cmat/formel/koseleff/Spad/spad7/HFLA.NRLIB for domain
   HallFreeLieAlgebra
   loading /cmat/formel/koseleff/Spad/spad7/LS.NRLIB for package LieSeries
```

On donne une liste d'abréviations :

```
macro ST == String

   (29)  STRING
                                                                Type: DOMAIN
                                                                 Time: 0 sec
macro SE == Symbol

   (30)  SYMBOL
                                                                Type: DOMAIN
                                                                 Time: 0 sec
macro LSE == List SE

   (31)  LIST SYMBOL
                                                                Type: DOMAIN
                                                Time: 0.01 (IN) = 0.01 sec
macro O == OUTFORM

   (32)  OUTFORM
                                                                Type: DOMAIN
                                                Time: 0.01 (OT) = 0.01 sec
macro R == POLY FRAC INT

   (33)  POLY FRAC INT
                                                                Type: DOMAIN
                                                                 Time: 0 sec
macro L == LFLA(R,SE)

   (34)  LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                                                Type: DOMAIN
                                    Time: 0.01 (IN) + 0.01 (OT) = 0.02 sec
macro H == HFLA(R,SE)

   (35)  HFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                                                Type: DOMAIN
                                    Time: 0.01 (IN) + 0.01 (OT) = 0.02 sec
macro LL ==LS(R,L)

   (36)  LS(POLY FRAC INT,LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL))
                                                                Type: DOMAIN
                                    Time: 0.01 (IN) + 0.01 (OT) = 0.02 sec
macro M == MG SE
```

```
   (38)  MG SYMBOL
                                                   Type: DOMAIN
                                     Time: 0.01 (IN) = 0.01 sec
```

On se donne un élément du magma :

```
a:M:=a

   (40)  a
                                                Type: MG SYMBOL
                         Time: 0.01 (IN) + 0.01 (OT) = 0.02 sec
b:M:=b

   (41)  b
                                                Type: MG SYMBOL
                                     Time: 0.02 (OT) = 0.02 sec
c:M:=c

   (42)  c
                                                Type: MG SYMBOL
                                     Time: 0.01 (IN) = 0.01 sec

m:=a*b*c*c*b*a*a*b*c

   (44)  [[[[[[[[a,b],c],c],b],a],a],b],c]
                                                Type: MG SYMBOL
                         Time: 0.06 (IN) + 0.02 (OT) = 0.08 sec
```

On décompose cet élément sur les deux bases, on peut d'ailleurs connaître le nombre de monômes :

```
mh:=m::H;
                                  Type: HFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                 Time: 4.54 (IN) + 0.04 (OT) + 0.59 (GC) = 5.17 sec
ml:=m::L;
                                  Type: LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                      Time: 0.51 (IN) = 0.51 sec
size mh

   (47)  128
                                                        Type: PI
                                      Time: 0.06 (OT) = 0.06 sec
size ml

   (48)  48
                                                        Type: PI
                                      Time: 0.01 (OT) = 0.01 sec
```

On peut enfin vérifier que les deux décompositions coïncident :

```
reduce(+,[u*(v::H) for u in listOfCoefficient ml for v in listOfMonomials ml])-mh

   (49)  0
                                  Type: HFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
       Time: 0.52 (IN) + 51.45 (EV) + 0.25 (OT) + 4.34 (GC) = 56.56 sec
```

```
reduce(+,[u*(v::L) for u in listOfCoefficient mh for v in listOfMonomials mh])-ml

   (50)  0
                                              Type: LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
          Time: 0.29 (IN) + 19.33 (EV) + 0.01 (OT) + 2.45 (GC) = 22.08 sec
```

On recommence l'opération avec un autre monôme :

```
m:=c*m

   (52)  [c,[[[[[[[[a,b],c],c],b],a],a],b],c]]
                                                              Type: MG SYMBOL
                                                   Time: 0.03 (OT) = 0.03 sec
mh:=m::H;

                                              Type: HFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                     Time: 17.20 (IN) + 0.59 (GC) = 17.79 sec
ml:=m::L;

                                              Type: LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                       Time: 3.39 (IN) + 0.60 (GC) = 3.99 sec
size mh

   (55)  229
                                                                   Type: PI
                                       Time: 0.01 (IN) + 0.01 (OT) = 0.02 sec
size ml

   (56)  153
                                                                   Type: PI
                                                   Time: 0.01 (IN) = 0.01 sec

reduce(+,[u*(v::H) for u in listOfCoefficient ml for v in listOfMonomials ml])-mh

   (57)  0
                                              Type: HFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
       Time: 0.03 (IN) + 249.33 (EV) + 0.03 (OT) + 15.79 (GC) = 265.18 sec


reduce(+,[u*(v::L) for u in listOfCoefficient mh for v in listOfMonomials mh])-ml

   (58)  0
                                              Type: LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
          Time: 0.03 (IN) + 75.10 (EV) + 0.02 (OT) + 1.59 (GC) = 76.74 sec
```

Il semble, sur cet exemple, que la décomposition sur la base de Lyndon soit plus rapide que sur la base de Hall

B.2. Calcul des intégrateurs symplectiques

On calcule, ici, les relations polynomiales que l'on doit résoudre, pour obtenir des intégrateurs symplectiques réversibles comme le produit d'intégrateurs d'ordre 2.

Si $K = \sum_{a_{i,j}} k_{i,j}$ et $S_2(t) = \exp(\sum_{i\geq 1} t^{2i+1} L_{h_{2i+1}}$, on calcule

$$\log\left[S_2(xt)e^{tL_K}S_2(xt)\right]. \tag{B.1}$$

La première étape est le calcul de la base de Lyndon pour les ordres impairs.

```
kk:=mkSymbol(h,1,9)$LL

   (59)  [h ,h ,h ,h ,h ,h ,h ,h ,h ]
           1  2  3  4  5  6  7  8  9
                                                              Type: LIST SYMBOL
                                Time: 0.03 (IN) + 0.03 (EV) + 0.07 (OT) = 0.13 sec
kkk:=[list u for u in kk]

   (60)  [[h ],[h ],[h ],[h ],[h ],[h ],[h ],[h ],[h ]]
            1    2    3    4    5    6    7    8    9
                                                         Type: LIST LIST SYMBOL
                                Time: 0.02 (IN) + 0.01 (EV) + 0.07 (OT) = 0.10 sec
for i in 1..4 repeat kkk.(2*i) := []
                                                                     Type: VOID
                                Time: 0.38 (IN) + 0.01 (EV) + 0.06 (OT) = 0.45 sec

bk:=weightedBasis(kkk,9)$L

   (62)
   [[h ], [], [h ], [[h ,h ]], [[h ,[h ,h ]],h ], [[h ,[h ,[h ,h ]]],[h ,h ]],
      1         3      1  3        1   1  3     5      1   1   1  3      1  5
    [[h ,[h ,[h ,[h ,h ]]]],[h ,[h ,h ]],[[h ,h ],h ],h ],
       1   1   1   1  3        1   1  5      1  3   3   7
      [h ,[h ,h ]], [[h ,h ],h ], h ] ]
        1   3  5       1  5   3    9
                                                      Type: LIST LIST MG SYMBOL
                                Time: 0.01 (IN) + 0.08 (EV) + 0.34 (OT) = 0.43 sec
for i in 1..4 repeat bk.(2*i) := []
                                                                     Type: VOID
                                                    Time: 0.13 (IN) = 0.13 sec
bk:=[reverse u for u in bk];
                                                      Type: LIST LIST MG SYMBOL
                                          Time: 0.01 (IN) + 0.18 (OT) = 0.19 sec
```

On calcule, ensuite, un polynôme de Lie générique

```
ck:List List SE:=[[subscript(a,[i,j]) for j in 1..#(bk.i)] for i in 1..9]

   (65)
   [[a   ], [], [a   ], [], [a   ,a   ], [], [a   ,a   ,a   ,a   ], [],
      1,1         3,1         5,1  5,2          7,1  7,2  7,3  7,4
    [a   ,a   ,a   ,a   ,a   ,a   ,a   ,a   ]]
      9,1  9,2  9,3  9,4  9,5  9,6  9,7  9,8
                                                         Type: LIST LIST SYMBOL
              Time: 0.28 (IN) + 0.35 (EV) + 0.85 (OT) + 0.75 (GC) = 2.23 sec
hk:=[[(u::R)*(v::L) for u in xx for v in yy] for xx in ck for yy in bk];

                                    Type: LIST LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                Time: 0.03 (IN) + 0.11 (EV) + 0.49 (OT) = 0.63 sec
hh:=concat(0$L,[reduce(+,u,0$L) for u in hk])

   (67)
   [a   h , 0, a   h , 0, a   h  + a   [h ,[h ,h ]], 0,
```

```
  1,1 1      3,1 3      5,2 5    5,1  1   1  3
 a   h  + a   [h ,[h ,h ]] + a   [[h ,h ],h ] + a   [h ,[h ,[h ,[h ,h ]]]],
  7,4 7    7,2  1   1  5      7,3  1  3   3     7,1  1   1   1   1  3
 0,

    a   h  + a   [h ,[h ,h ]] + a   [h ,[h ,h ]] + a   [[h ,h ],h ]
     9,8 9    9,5  1   1  7      9,6  1   3  5      9,7   1  5   3
  +
    a   [h ,[h ,[h ,[h ,h ]]]] + a   [h ,[h ,[[h ,h ],h ]]]
     9,2  1   1   1   1  5        9,3  1   1    1  3   3
  +
    a   [[h ,[h ,h ]],[h ,h ]] + a   [h ,[h ,[h ,[h ,[h ,[h ,h ]]]]]] ]
     9,4   1   1  3     1  3      9,1  1   1   1   1   1   1  3

                                    Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                     Time: 0.05 (IN) + 0.01 (EV) + 0.33 (OT) = 0.39 sec
```

On calcule $S_2(xt)\exp(tL_k)S_2(xt)a$

```
ha:=[a::M::L]

   (69)  [a]
                                    Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                  Time: 0.02 (IN) + 0.01 (OT) = 0.03 sec
ha:=concat(ha,[0$L for i in 1..9])

   (70)  [a,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
                                    Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                     Time: 0.02 (IN) + 0.02 (EV) + 0.04 (OT) = 0.08 sec
hx:=[(x::R)**i * (v::L) for i in 1..9 for v in kk]

                 2    3    4    5    6    7    8    9
   (71)  [x h ,x h ,x h ,x h ,x h ,x h ,x h ,x h ,x h ]
             1    2    3    4    5    6    7    8    9
                                    Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                     Time: 0.46 (IN) + 0.04 (EV) + 0.56 (OT) = 1.06 sec
for i in 1..4 repeat hx.(2*i) := 0$L
                                                               Type: VOID
                     Time: 0.03 (IN) + 0.01 (EV) + 0.01 (OT) = 0.05 sec
hx:=concat(0$L,hx)

                    3      5      7      9
   (73)  [0,x h ,0,x h ,0,x h ,0,x h ,0,x h ]
               1      3      5      7      9
                                    Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                  Time: 0.01 (IN) + 0.03 (OT) = 0.04 sec
res:=exponential(hx,exponential(hh,exponential(hx,ha)));

                                    Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
             Time: 0.02 (IN) + 17.66 (EV) + 0.04 (OT) + 0.79 (GC) = 18.51 sec
```

que l'on compare à $\exp(t\sum_{L_{k_i}})a$

```
lkl:=concat(0$L,mkLiePol(k,1,9)$LL)

   (75)  [k ,k ,k ,k ,k ,k ,k ,k ,k ]
```

```
          1   2   3   4   5   6   7   8   9
                                              Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                Time: 0.01 (IN) + 0.02 (EV) + 0.06 (OT) = 0.09 sec
exp:=exponential(lkl,ha);

                                              Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                             Time: 0.02 (IN) + 8.54 (EV) = 8.56 sec
lk:=mkLieMon(k,1,9)$LL

   (78)  [k ,k ,k ,k ,k ,k ,k ,k ,k ]
           1  2  3  4  5  6  7  8  9
                                                             Type: LIST MG SYMBOL

triangularFactorSystemSolve(first(lk,9),rest exp,rest res,a)

                                              Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                Time: 0.02 (IN) + 5.91 (EV) + 0.02 (OT) = 5.95 sec

triangularFactorSystemSolve(first(lk,5),rest exp,rest res,a)
   (79)
                                   3
   [(a    + 2x)h , 0, (a    + 2x )h , 0,
      1,1       1       3,1        3

                     5
       (a    + 2x )h
         5,2        5
     +
                       1          1  2        1  3    2  1  4
       (a    + (- - x a    - - x )a    + - x a     + - x a   )[h ,[h ,h ]] ]
         5,1       6    1,1   6     3,1   6    1,1    6    1,1   1   1  3

                                              Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                                Time: 0.01 (IN) + 0.21 (EV) + 0.11 (OT) = 0.33 sec
```

On a ainsi trouvé les relations que l'on sauve dans un fichier. La liste des polynômes s'appelle `lp2`.

⁂

L'étape suivante est la construction d'une fonction qui calcule les différentes relations, si l'on cherche

$$S_r = S_2(c_n t)\cdots S_2(c_1 t)\cdots S_2(c_n t). \tag{B.2}$$

Pour des raisons techniques, on pose d'ailleurs $c_1 = a, c_2 = b$ etc. `r` désigne le nombre de polynômes à calculer. Pour avoir un intégrateur d'ordre 4, il faudra prendre $r = 2$, $r = 4$, pour un intégrateur d'ordre 6, $r = 8$, pour un intégrateur d'ordre 8.

```
eq2b(n:NNI,r:NNI):List R ==
  ch:R:=char(97)::ST::SE::R
  l:List R:=first([leadingMonomial u for u in lp2],r)
  lv:=reduce(append,[variables(u) for u in l])
  lv:=concat(lv,'b)
  l:=first([ch,ch**3,ch**5,0,ch**7,0,0,0,ch**9,0,0,0,0,0,0,0],r)
  for i in 2..n repeat
```

```
     ch:=char(96+i)::ST::SE::R
     l1:=concat(l,ch)
     l:=[eval(u,lv,l1) for u in first(lp4,r)]
  l.1 := l.1 -1
  l
```

Par exemple, on obtient pour différents ordres

```
(108) ->eq2b(2,2)
   loading /axiom/mnt/rios/algebra/VARIABLE.NRLIB for domain Variable
   Compiling function eq2b with type (NNI,NNI) -> LIST POLY FRAC INT

                         3    3
   (108)  [2b + a - 1,2b  + a ]
                                                     Type: LIST POLY FRAC INT
                             Time: 0.92 (IN) + 0.12 (EV) + 0.42 (OT) = 1.46 sec
(109) ->eq2b(4,4)

   (109)
                             3     3     3    3    5     5     5    5
   [2d + 2c + 2b + a - 1, 2d  + 2c  + 2b  + a , 2d  + 2c  + 2b  + a ,

        1     1     1    4    2  2    4     2       2  2   2       1  2  3
       (- c + - b + - a)d  + (- c  + (- b + - a)c + - b  + - a b + - a )d
        3     3     6         3       3     3       3      3       6
     +
          1  3   1  3   1  3  2
       (- - c  - - b  - - a )d
          3      3      6
     +
             2  4      2     1    3      2  3   1  3     2  4   1    3   1  3
           - - c  + (- - b - - a)c  + (- - b  - - a )c - - b  - - a b  - - a b
             3         3     3           3      3        3      3        3
        +
             1  4
           - - a
             6
      *
         d
     +
        1     1    4    2  2   2       1  2  3      1  3   1  3  2
       (- b + - a)c  + (- b  + - a b + - a )c  + (- - b  - - a )c
        3     6         3      3       6            3      6
     +
          2  4   1    3   1  3    1  4     1    4   1  2 3   1  3 2   1  4
       (- - b  - - a b  - - a b - - a )c + - a b  + - a b  - - a b  - - a b ]
          3      3        3       6        6        6        6        6

                                                     Type: LIST POLY FRAC INT
                                         Time: 0.09 (EV) + 0.37 (OT) = 0.46 sec
```

La fonction `groebner` d'Axiom permet, alors, de calculer une base standard pour l'ordre de l'élimination

```
groebner %;
```

```
                                                      Type: LIST POLY FRAC INT
         Time: 0.03 (IN) + 202.51 (EV) + 0.24 (OT) + 41.89 (GC) = 244.67 sec
(24) ->%.last

   (24)
    39     38      37   232  36   6469  35   8108  34   82144  33   239008  32
   a   + 4a   - 18a   - --- a   + ---- a   + ---- a   - ----- a   - ------ a
                         3         45         15         135          135
  +
    870652  31   5898416  30   618824  29   5158016  28   2525372  27
    ------ a   + ------- a   - ------ a   - ------- a   + ------- a
     675          2025          675          2025          30375
  +
    32135888  26   1377776  25   33361568  24   536566  23   35651416  22
    -------- a   - ------- a   - -------- a   + ------ a   + -------- a
     30375          10125         91125         10125         455625
  +
      19660868  21   8051504  20   5636474  19   11313208  18   17674448  17
    - -------- a   - ------- a   + ------- a   + -------- a   - -------- a
      1366875       455625       1366875       4100625       20503125
  +
      8733536   16   1302268  15    87632   14    624184   13    288448    12
    - -------- a   + ------- a   + ------- a   - -------- a   + --------- a
      20503125       6834375       2460375       20503125       922640625
  +
    3333844   11    716752    10    127664    9    143264    8     136499    7
   --------- a   - --------- a   - --------- a   + --------- a   - ---------- a
   922640625       922640625       553584375      922640625      4613203125
  +
        19996     6     117142     5      33848     4      17431      3
    - ---------- a  + ----------- a  - ----------- a  + ------------ a
      8303765625      41518828125      41518828125      124556484375
  +
         9668      2       656              64
    - ------------ a  + ------------ a - -------------
      622782421875      622782421875     1868347265625
                                                           Type: POLY FRAC INT
                               Time: 0.02 (IN) + 0.01 (EV) + 0.44 (OT) = 0.47 sec
```

Les autres polynômes étant de la forme $b = P_b(a), c = P_c(a), d = P_d(a)$, on en déduit que la variété des solutions est de dimension nulle et contient 39 points.

Utilisant les fonctions définies à partir du paquetage de séries de Lie, on peut calculer les relations que doit vérifier un produit réversible de 15 (2.8-1) opérateurs par :

```
res:=symplecticr(8,5);
                                        Type: LIST LFLA(POLY FRAC INT,SYMBOL)
                              Time: 0.02 (IN) + 3.25 (EV) + 1.27 (GC) = 4.54 sec
res.4:=0$L;
lp:=reduce(append([[listOfCoefficient x for x in res]]));
res.1:=res.1 - 1;
res.2:=res.2 - 1;
```

Le résultat, qui est une liste de polynômes, est converti en format Macaulay et on trouve une liste de polynômes à coefficients entiers

```
; 2D+2C+2B+2A-1 2d+2c+2b+a-1
```

```
; -2D2d-4DCd+4C2d-4DBd+8CBd+4B2d-4DAd+8CAd+8BAd+4A2d-2D2c-4DCc-2C2c-4DBc-4CBc \
;     +4B2c-4DAc-4CAc+8BAc+4A2c-2D2b-4DCb-2C2b-4DBb-4CBb-2B2b-4DAb-4CAb-4BAb \
;     +4A2b-D2a-2DCa-C2a-2DBa-2CBa-B2a-2DAa-2CAa-2BAa-A2a

; 4Dd2-2Cd2-2Bd2-2Ad2+8Ddc-4Cdc-4Bdc-4Adc+4Dc2+4Cc2-2Bc2-2Ac2+8Ddb-4Cdb-4Bdb \
;     -4Adb+8Dcb+8Ccb-4Bcb-4Acb+4Db2+4Cb2+4Bb2-2Ab2+4Dda-2Cda-2Bda-2Ada+4Dca \
;     +4Cca-2Bca-2Aca+4Dba+4Cba+4Bba-2Aba+Da2+Ca2+Ba2+Aa2

; -2D3d-6D2Cd+4C3d-6D2Bd+12C2Bd+12CB2d+4B3d-6D2Ad+12C2Ad+24CBAd+12B2Ad+12CA2d \
;     +12BA2d+4A3d-2D3c-6D2Cc-6DC2c-2C3c-6D2Bc-12DCBc-6C2Bc+4B3c-6D2Ac-12DCAc \
;     -6C2Ac+12B2Ac+12BA2c+4A3c-2D3b-6D2Cb-6DC2b-2C3b-6D2Bb-12DCBb-6C2Bb-6DB2b \
;     -6CB2b-2B3b-6D2Ab-12DCAb-6C2Ab-12DBAb-12CBAb-6B2Ab+4A3b-D3a-3D2Ca-3DC2a \
;     -C3a-3D2Ba-6DCBa-3C2Ba-3DB2a-3CB2a-B3a-3D2Aa-6DCAa-3C2Aa-6DBAa-6CBAa \
;     -3B2Aa-3DA2a-3CA2a-3BA2a-A3a

; 4D2d2+4DCd2-4C2d2+4DBd2-8CBd2-4B2d2+4DAd2-8CAd2-8BAd2-4A2d2+8D2dc+8DCdc \
;     -4C2dc+8DBdc-8CBdc-8B2dc+8DAdc-8CAdc-16BAdc-8A2dc+4D2c2+8DCc2+4C2c2 \
;     +4DBc2+4CBc2-4B2c2+4DAc2+4CAc2-8BAc2-4A2c2+8D2db+8DCdb-4C2db+8DBdb-8CBdb \
;     -4B2db+8DAdb-8CAdb-8BAdb-8A2db+8D2cb+16DCcb+8C2cb+8DBcb+8CBcb-4B2cb \
;     +8DAcb+8CAcb-8BAcb-8A2cb+4D2b2+8DCb2+4C2b2+8DBb2+8CBb2+4B2b2+4DAb2+4CAb2 \
;     +4BAb2-4A2b2+4D2da+4DCda-2C2da+4DBda-4CBda-2B2da+4DAda-4CAda-4BAda-2A2da \
;     +4D2ca+8DCca+4C2ca+4DBca+4CBca-2B2ca+4DAca+4CAca-4BAca-2A2ca+4D2ba+8DCba \
;     +4C2ba+8DBba+8CBba+4B2ba+4DAba+4CAba+4BAba-2A2ba+D2a2+2DCa2+C2a2+2DBa2 \
;     +2CBa2+B2a2+2DAa2+2CAa2+2BAa2+A2a2
```

B.3. Une session Macaulay

Ayant initialisé l'environnement de Macaulay, on peut calculer la fonction de Hilbert de l'idéal défini par les polynômes précédents. On travaille en caractéristique 31991.

```
<inhomog_std j w

hilb w

; codimension = 8
; degree      = 39
; genus       = 94
```

On en déduit que la variété ainsi définie est de dimension nulle et de degré 39. Toutes les solutions ont été obtenues avec des produits réversibles d'intégrateurs d'ordre 2.

Avec le même logiciel, on peut étudier la variété des solutions dans la recherche d'un intégrateur d'ordre 5 exprimé comme produit de 11 opérateurs. On trouve en 140 minutes que la variété est de dimension nulle et de degré 46.

```
1% hilb w

; codimension = 11
; degree      = 46
; genus       = 990

1% type w

; A46-90/77A45-4/105A44+6268A43+8040A42+74/95A41-12607A40+35/37A39+79/59A38 \
;     -837A37+66/115A36+4205A35+8812A34-34/27A33+207A32+4540A31+9576A30+53A29 \
```

```
;     -65/21A28+31/27A27-92A26-111/121A25-14668A24-143A23-87/80A22+31/108A21 \
;     -9910A20+55/63A19-14/115A18-4122A17-9707A16+52/51A15+2771A14+1/104A13 \
;     +83/109A12+95/102A11+45/17A10+111/103A9-101/63A8+3436A7-103/23A6+86/65A5 \
;     -98/97A4-2300A3-9386A2-13527A-107/119

; B+13653A45+52/5A44+66/103A43+4/15A42-12273A41-119/37A40+109/89A39+1178A38 \
;     -10603A37+7445A36+11306A35+124/119A34-8353A33-6566A32+114/43A31-37/84A30 \
;     -89/91A29+1787A28-68/65A27+85/53A26-21/2A25-21/61A24+85/74A23+676A22 \
;     -3/121A21-66/41A20+21/100A19+81/116A18+53/13A17-85/101A16-125/114A15 \
;     +11931A14-6290A13+103/95A12+89/97A11+57/56A10+1570A9+9122A8-9751A7 \
;     -18/7A6-14704A5+15899A4+124/55A3-111/52A2+13/82A+3983

; C-44/15BA22-16/47BA21+3905BA20-14321BA19-2/63BA18+8922BA17+35/59BA16 \
;     +37/8BA15+97/38BA14+65/124BA13+8774BA12+117/80BA11+11809BA10+6576BA9 \
;     +103/66BA8+9173BA7-837BA6-55/7BA5+1694BA4-83/41BA3-1158BA2-20/91BA \
;     +16/113B+8775A22+32/93A21+6949A20-10544A19-67/45A18-13002A17+103/38A16 \
;     -93/121A15+46/19A14-6007A13-63A12-49/92A11-11775A10+70/59A9-79/76A8 \
;     +8605A7+5509A6-75/49A5+113/116A4+9005A3-68/105A2+12163A-71/30

; D+108/47CA14-61/58CA13+119/47CA12+118/99CA11+81/76CA10-93/85CA9-7658CA8 \
;     +5127CA7+57/13CA6+67/122CA5+6967CA4+119/69CA3+8232CA2-99/25CA-31/115C \
;     -67/109BA15+9398BA14-53/52BA13+43/16BA12-5888BA11-10901BA10+12945BA9 \
;     +6692BA8+4395BA7-7687BA6-64/123BA5+79/70BA4-15805BA3+73/97BA2+89/124BA \
;     -25/88B+108/47A15+22/57A14-11084A13+55/117A12-19/30A11-109/55A10 \
;     -114/115A9+11/97A8+24/59A7-5/86A6+61/123A5+7861A4-37/64A3+11759A2-1868A \
;     -107/103

; E+C+A-1/2 F+D+B-1/2 a-2A b-2B+2A c-2C+2B-2A d-2D+2C-2B+2A e+2D+2B-1
```

C. Relation de type exponentielle

C.1. Formule de Campbell-Hausdorff

$$
\begin{aligned}
&\log(e^x e^y) = x + y - \tfrac{1}{2}\,[x,\,y] + \tfrac{1}{12}\,[x,\,[x,\,y]] + \tfrac{1}{12}\,[[x,\,y],\,y] - \tfrac{1}{24}\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]\\
&- \tfrac{1}{720}\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,y]]]] + \tfrac{1}{180}\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]] + \tfrac{1}{180}\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]] + \tfrac{1}{120}\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]\\
&+ \tfrac{1}{360}\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]] - \tfrac{1}{720}\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y] + \tfrac{1}{1440}\,[x,\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]]]\\
&- \tfrac{1}{360}\,[x,\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]] - \tfrac{1}{240}\,[x,\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]] - \tfrac{1}{720}\,[x,\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]]]\\
&+ \tfrac{1}{1440}\,[x,\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y]] + \tfrac{1}{30240}\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,y]]]]]] - \tfrac{1}{5040}\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]]]]\\
&+ \tfrac{1}{3780}\,[x,\,[x,\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]]] + \tfrac{1}{1680}\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]]]\\
&+ \tfrac{1}{10080}\,[x,\,[x,\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]]]] + \tfrac{1}{3780}\,[x,\,[x,\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y]]]\\
&+ \tfrac{13}{15120}\,[x,\,[[x,\,y],\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]] + \tfrac{1}{1260}\,[x,\,[[x,\,[[x,\,y],\,y]],\,[x,\,y]]]\\
&- \tfrac{1}{5040}\,[x,\,[[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y],\,y]] + \tfrac{1}{1260}\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]]\\
&- \tfrac{1}{2016}\,[[x,\,y],\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y]] + \tfrac{1}{2016}\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]]\\
&- \tfrac{1}{5040}\,[[[x,\,y],\,y],\,[[[x,\,y],\,y],\,y]] + \tfrac{1}{10080}\,[[x,\,[x,\,[x,\,y]]],\,[x,\,[x,\,y]]]\\
&+ \tfrac{1}{10080}\,[[x,\,[[x,\,y],\,y]],\,[[x,\,y],\,y]] - \tfrac{1}{1512}\,[[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]],\,[x,\,y]]\\
&- \tfrac{1}{5040}\,[[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]],\,[x,\,y]] + \tfrac{1}{30240}\,[[[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y],\,y],\,y]\\
&- \tfrac{1}{60480}\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,y]]]]]] + \tfrac{1}{10080}\,[x,\,[x,\,[x,\,[x,\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]]]]\\
&+ \tfrac{1}{20160}\,[x,\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,[[x,\,y],\,y]]]]] + \tfrac{1}{15120}\,[x,\,[x,\,[x,\,[[x,\,[x,\,y]],\,[x,\,y]]]]]\\
&- \tfrac{23}{120960}\,[x,\,[x,\,[x,\,[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y]]]] - \tfrac{13}{30240}\,[x,\,[x,\,[[x,\,y],\,[[[x,\,y],\,y],\,y]]]]\\
&- \tfrac{1}{2520}\,[x,\,[x,\,[[x,\,[[x,\,y],\,y]],\,[x,\,y]]]] + \tfrac{1}{10080}\,[x,\,[x,\,[[[[[x,\,y],\,y],\,y],\,y],\,y]]]
\end{aligned}
$$

$$- \tfrac{1}{2520}\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]] + \tfrac{1}{4032}\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]$$
$$- \tfrac{1}{4032}\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]] + \tfrac{1}{10080}\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]$$
$$- \tfrac{1}{20160}\ [x,\ [[x,\ [x,\ [x,\ y]]],\ [x,\ [x,\ y]]]] - \tfrac{1}{20160}\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]]$$
$$+ \tfrac{1}{3024}\ [x,\ [[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]]] + \tfrac{1}{10080}\ [x,\ [[[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]$$
$$- \tfrac{1}{60480}\ [x,\ [[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]] - \tfrac{1}{1209600}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ y]]]]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{151200}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]]]]] - \tfrac{1}{56700}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]]$$
$$- \tfrac{1}{43200}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]]]] - \tfrac{1}{100800}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{75600}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]]] + \tfrac{11}{302400}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{75600}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ y]]]]] + \tfrac{1}{75600}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{100800}\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]]] + \tfrac{1}{20160}\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{67200}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]]] + \tfrac{1}{30240}\ [x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]$$
$$+ \tfrac{11}{201600}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]]] + \tfrac{11}{151200}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{43200}\ [x,\ [x,\ [[[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]] - \tfrac{1}{56700}\ [x,\ [x,\ [[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]]$$
$$+ \tfrac{1}{6048}\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]] - \tfrac{23}{302400}\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]]$$
$$+ \tfrac{23}{302400}\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]] + \tfrac{1}{37800}\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]]$$
$$- \tfrac{11}{120960}\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]] + \tfrac{1}{25200}\ [x,\ [[x,\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]],\ [x,\ [x,\ y]]]]$$
$$- \tfrac{1}{15120}\ [x,\ [[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]] - \tfrac{1}{20160}\ [x,\ [[[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]]$$
$$+ \tfrac{1}{33600}\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]],\ [x,\ y]]] - \tfrac{1}{7560}\ [x,\ [[x,\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]]]$$
$$- \tfrac{17}{100800}\ [x,\ [[[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]] + \tfrac{1}{151200}\ [x,\ [[[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]$$
$$+ \tfrac{1}{10080}\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]] - \tfrac{1}{7560}\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]$$
$$- \tfrac{1}{15120}\ [[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]] + \tfrac{1}{43200}\ [[x,\ y],\ [[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]$$
$$+ \tfrac{1}{25200}\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]] - \tfrac{1}{17280}\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]$$
$$- \tfrac{1}{8400}\ [[x,\ [x,\ y]],\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ y]]] + \tfrac{1}{33600}\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]$$
$$+ \tfrac{1}{43200}\ [[x,\ [x,\ [x,\ y]]],\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]] + \tfrac{1}{60480}\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]$$
$$+ \tfrac{1}{20160}\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]] + \tfrac{1}{60480}\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]$$
$$+ \tfrac{1}{302400}\ [[x,\ [x,\ [x,\ [x,\ y]]]],\ [x,\ [x,\ [x,\ y]]]] + \tfrac{1}{67200}\ [[x,\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]],\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]$$
$$+ \tfrac{1}{90720}\ [[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]] - \tfrac{1}{25200}\ [[[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]$$
$$- \tfrac{1}{21600}\ [[x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]],\ [x,\ [x,\ y]]] - \tfrac{1}{30240}\ [[x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]],\ [x,\ [x,\ y]]]$$
$$+ \tfrac{1}{60480}\ [[x,\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]] + \tfrac{1}{15120}\ [[[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]$$
$$- \tfrac{1}{10080}\ [[x,\ [[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]],\ [x,\ y]] + \tfrac{1}{21600}\ [[x,\ [[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]]$$
$$+ \tfrac{1}{20160}\ [[[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ y]] + \tfrac{1}{10080}\ [[[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]$$
$$+ \tfrac{1}{50400}\ [[[[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]] - \tfrac{1}{1209600}\ [[[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]$$
$$+ \tfrac{1}{2419200}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]]]]]] - \tfrac{1}{302400}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{604800}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]]]]] - \tfrac{1}{403200}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]]]]]$$
$$+ \tfrac{37}{3628800}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]]]] + \tfrac{1}{56700}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{37800}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ y]]]]]] - \tfrac{1}{67200}\ [x,\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]]]]$$
$$+ \tfrac{17}{604800}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]]]] - \tfrac{11}{241920}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{75600}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]]]]] - \tfrac{1}{40320}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{241920}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ [x,\ y]]],\ [x,\ [x,\ y]]]]]] - \tfrac{1}{43200}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]]]]$$
$$- \tfrac{29}{453600}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]]]]] - \tfrac{1}{50400}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]]]$$
$$+ \tfrac{37}{3628800}\ [x,\ [x,\ [x,\ [[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]]] - \tfrac{1}{12096}\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]$$
$$+ \tfrac{23}{604800}\ [x,\ [x,\ [[x,\ y],\ [[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]]] - \tfrac{23}{604800}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]]]]]$$
$$- \tfrac{1}{75600}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ y]],\ [[x,\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]]] + \tfrac{11}{241920}\ [x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ y],\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]]]]$$
$$- \tfrac{1}{50400}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [x,\ [[x,\ y],\ y]]],\ [x,\ [x,\ y]]]]] + \tfrac{1}{30240}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[[x,\ y],\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{40320}\ [x,\ [x,\ [[[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]],\ [[x,\ y],\ y]]]] - \tfrac{1}{67200}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]],\ [x,\ y]]]]$$
$$+ \tfrac{1}{15120}\ [x,\ [x,\ [[x,\ [[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y]],\ [x,\ y]]]] + \tfrac{17}{201600}\ [x,\ [x,\ [[[x,\ [[x,\ y],\ y]],\ [x,\ y]],\ [x,\ y]]]]$$
$$- \tfrac{1}{302400}\ [x,\ [x,\ [[[[[[x,\ y],\ y],\ y],\ y],\ y],\ y]]] - \tfrac{1}{20160}\ [x,\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ [[x,\ y],\ y]]]]]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{1}{15120}\, [x,\, [[x,\, y],\, [[x,\, y],\, [[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y]]]] + \tfrac{1}{30240}\, [x,\, [[x,\, y],\, [[[x,\, y],\, y],\, [[[x,\, y],\, y],\, y]]]]\\
&- \tfrac{1}{86400}\, [x,\, [[x,\, y],\, [[[[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y],\, y],\, y]]] - \tfrac{1}{50400}\, [x,\, [[x,\, [x,\, y]],\, [x,\, [[x,\, y],\, [[x,\, y],\, y]]]]]\\
&+ \tfrac{1}{34560}\, [x,\, [[x,\, [x,\, y]],\, [x,\, [[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y]]]] + \tfrac{1}{16800}\, [x,\, [[x,\, [x,\, y]],\, [[x,\, [[x,\, y],\, y]],\, [x,\, y]]]]\\
&- \tfrac{1}{67200}\, [x,\, [[[x,\, y],\, y],\, [[[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y],\, y]]] - \tfrac{1}{86400}\, [x,\, [[x,\, [x,\, [x,\, y]]],\, [x,\, [x,\, [[x,\, y],\, y]]]]]\\
&- \tfrac{1}{120960}\, [x,\, [[x,\, [[x,\, y],\, y]],\, [x,\, [[[x,\, y],\, y],\, y]]]] - \tfrac{1}{40320}\, [x,\, [[x,\, [[x,\, y],\, y]],\, [[x,\, y],\, [[x,\, y],\, y]]]]\\
&- \tfrac{1}{120960}\, [x,\, [[[[x,\, y],\, y],\, y],\, [[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y]]] - \tfrac{1}{604800}\, [x,\, [[x,\, [x,\, [x,\, [x,\, y]]]],\, [x,\, [x,\, [x,\, y]]]]]\\
&- \tfrac{1}{134400}\, [x,\, [[x,\, [x,\, [[x,\, y],\, y]]],\, [x,\, [[x,\, y],\, y]]]] - \tfrac{1}{181440}\, [x,\, [[x,\, [[[x,\, y],\, y],\, y]],\, [[[x,\, y],\, y],\, y]]]\\
&+ \tfrac{1}{50400}\, [x,\, [[[x,\, [x,\, y]],\, [x,\, y]],\, [x,\, [[x,\, y],\, y]]]] + \tfrac{1}{43200}\, [x,\, [[x,\, [x,\, [[[x,\, y],\, y],\, y]]],\, [x,\, [x,\, y]]]]\\
&+ \tfrac{1}{60480}\, [x,\, [[x,\, [[x,\, [x,\, y]],\, [x,\, y]]],\, [x,\, [x,\, y]]]] - \tfrac{1}{120960}\, [x,\, [[x,\, [[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y]],\, [[x,\, y],\, y]]]\\
&- \tfrac{1}{30240}\, [x,\, [[[x,\, y],\, [[[x,\, y],\, y],\, y]],\, [[x,\, y],\, y]]] + \tfrac{1}{20160}\, [x,\, [[x,\, [[x,\, y],\, [[[x,\, y],\, y],\, y]]],\, [x,\, y]]]\\
&- \tfrac{1}{43200}\, [x,\, [[x,\, [[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y],\, y]],\, [x,\, y]]] - \tfrac{1}{40320}\, [x,\, [[[x,\, [[x,\, y],\, y]],\, [[x,\, y],\, y]],\, [x,\, y]]]\\
&- \tfrac{1}{20160}\, [x,\, [[[x,\, [[[x,\, y],\, y],\, y]],\, [x,\, y]],\, [x,\, y]]] - \tfrac{1}{100800}\, [x,\, [[[[x,\, [x,\, y]],\, [x,\, y]],\, [x,\, y]],\, [x,\, y]]]\\
&+ \tfrac{1}{2419200}\, [x,\, [[[[[[[x,\, y],\, y],\, y],\, y],\, y],\, y],\, y],\, y]]
\end{aligned}
$$

C.2. Relations entre les générateurs des transformations

C.2.1. Compositions de transformations

Dans le tableau 4, on donne le nombre de termes et le temps de calcul des termes d'ordre successif, pour le calcul de la composée de transformations. On donne, pour chaque ordre n, la dimension du module $\tilde{L}_n(X)$, où $X = \{u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n, \ldots\}$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $|u_i|_* = |v_i|_* = i$, $u_i < v_i < u_{i+1} < v_{i+1}$.

Ordre	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Dim. de l'espace	**2**	**3**	**8**	**18**	**48**	**116**	**312**	**810**	**2184**	**5880**
w_i en fonction des u_i et des v_i dans $\cdots\exp(\varepsilon^n L_{w_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{w_1}) = [\cdots\exp(\varepsilon^n L_{u_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{u_1})]\,[\cdots\exp(\varepsilon^n L_{v_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{v_1})]$										
Nb. de Monômes	2	2	4	7	12	27	48	113	229	539
Temps de calcul (s.)		0.21	0.07	0.19	0.55	2.27	9.53	40.54	180.15	798.61
w_i en fonction des u_i et des v_i dans $\exp(\varepsilon L_{w_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{w_n} + \cdots) = \exp(\varepsilon L_{u_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{u_n} + \cdots)\exp(\varepsilon L_{v_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{v_n} + \cdots)$										
Nb. de monômes	2	2	4	7	15	33	75	174	413	987
Temps de calcul (s.)		0.10	0.07	0.18	0.74	4.21	13.98	66.95	328.38	1745.93

Table 4

C.2.2. Changement de représentation

On donne, dans le tableau 5, les temps de calcul ainsi que le nombre de termes dans le calcul des générateurs des différents transformations. Pour chaque ordre, on donne la dimension de $\tilde{L}_n(X)$ où $X = \{u_1, \ldots, u_n, \ldots\}$, où $|u_i|_* = i$ avec pour tout i, $u_i < u_{i+1}$.

Ordre	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Dimension de l'espace	**1**	**1**	**2**	**3**	**6**	**9**	**18**	**30**	**56**	**99**
g_i en fonction des k_i dans $\cdots\exp(\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{g_1}) = \exp(\varepsilon L_{k_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{k_n} + \cdots)$										
Nombre de monômes	1	1	2	3	6	9	18	29	56	95
Temps de calcul (s.)		0.21	0.04	0.07	0.14	0.31	0.71	1.82	5.25	16.31
w_i en fonction des k_i dans $T_{\varepsilon w_1 + \cdots \varepsilon^n w_n + \cdots} = \exp(\varepsilon L_{k_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{k_n} + \cdots)$										
Nombre de monômes	1	1	2	3	6	8	18	29	53	90
Temps de calcul (s.)		0.06	0.05	0.10	0.27	0.78	2.28	8.21	20.93	68.88
w_i en fonction des g_i dans $T_{\varepsilon w_1 + \cdots \varepsilon^n w_n + \cdots} = \cdots\exp(\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{g_1})$										
Nombre de monômes	1	1	2	2	4	5	8	12	19	28
Temps de calcul (s.)		0.04	0.05	0.10	0.26	0.69	3.28	5.93	17.74	56.83
k_i en fonction des g_i dans $\exp(\varepsilon L_{k_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{k_n} + \cdots) = \cdots\exp(\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{g_1})$										
Nombre de monômes	1	1	2	3	5	7	11	16	23	33
Temps de calcul (s.)		0.04	0.05	0.07	0.13	0.29	0.89	3.83	8.34	27.35
k_i en fonction des w_i dans $\exp(\varepsilon L_{k_1} + \cdots + \varepsilon^n L_{k_n} + \cdots) = T_{\varepsilon w_1 + \cdots \varepsilon^n w_n + \cdots}$										
Nombre de monômes	1	1	2	3	6	8	18	26	55	95
Temps de calcul (s.)		0.04	0.03	0.06	0.14	0.30	0.97	4.27	9.86	34.34
g_i en fonction des w_i dans $\cdots\exp(\varepsilon^n L_{g_n})\cdots\exp(\varepsilon L_{g_1}) = T_{\varepsilon w_1 + \cdots \varepsilon^n w_n + \cdots}$										
Nombre de monômes	1	1	2	3	6	8	18	28	55	95
Temps de calcul (s.)		0.02	0.04	0.08	0.15	0.29	0.69	1.80	5.16	16.29

Table 5

Résumé : Le but premier de cette thèse est de comparer les deux méthodes de Lie utilisées en théorie des perturbations en mécanique hamiltonienne : la méthode de Deprit et la méthode de Dragt-Finn. Toutes deux reposent sur l'utilisation de transformations canoniques (symplectiques) formelles. On étudie en particulier les liens entre ces deux approches pour conclure qu'elles conduisent, dans les cas non-résonants, à la construction des mêmes objets (forme normale et intégrales premières formelles). On propose, par la suite, des méthodes de construction de tels objets et on observe que la méthode de Dragt-Finn est moins coûteuse.

La connaissance des premiers termes de ces séries de Lie peut fournir des informations sur la stabilité de systèmes hamiltoniens, au voisinage de points d'équilibre elliptiques. On propose, à l'instar de ce qui a été fait avec la transformation de Lie, des estimations pour celle de Dragt-Finn.

Pour étudier les relations entre les différentes transformations canoniques, on se place dans une algèbre de Lie libre pour étudier des identités exponentielles. On donne alors des méthodes générales pour l'obtention de telles formules (dont la formule de Baker-Campbell-Hausdorff), en utilisant des propriétés de la base de Lyndon.

Ces identités explicites et leur méthode de calcul permettent alors d'obtenir des intégrateurs symplectiques. On retrouve alors les intégrateurs connus et on en donne une liste exhaustive pour les petits ordres, montrant que les différentes méthodes de recherches sont complètement équivalentes.

On décrit l'implantation de ces algorithmes dans le système de Calcul Formel Axiom et des exemples de calcul sont donnés en appendice.

Mots-clefs : méthodes de Lie, méthodes de perturbations, algèbres de Lie libres, transformations canoniques, calcul formel, intégrateurs symplectiques.

Abstract: Our first goal in this report is the comparison of the two Lie perturbation methods used in hamiltonian mechanics. The Deprit as well as the Dragt-Finn method are based on the use of canonical formal transformations. We particularly study the relations between these two transformations and conclude that they produce the same objects, for instance the normal form and formal first integrals. Therefore, we give methods to built such invariants and show that the Dragt-Finn method is less expansive, regards to the computational cost.

The knowledge of the first terms of these series may provide results for the stability of hamiltonian systems near an elliptic equilibrium point. We give some estimates for the Dragt-Finn method, like it has been given for the Deprit transform.

In order to study the relations between several canonical transform, we work in a free Lie algebra and study exponential identities. We give also general methods to compute these relations (including the Baker-Campbell-Hausdorff formula) using the Lyndon basis.

These explicit identities and their methods of computation allow us to obtain symplectic integrators. We list all the integrators of low order and prove that the several methods of investigation are totally equivalent.

The algorithms have been implemented using Axiom and some examples are given at the appendix.

Key words: Lie methods, perturbation methods, free Lie algebras, canonical transformations, computer algebra, symplectic integrators.